Eltitkolt módszerek az analízis történetében

Secret methods in the history of mathematical analisys

dr. MUNKÁCSY Katalin

ELTE TTK Matematikai Intézet
https://www.math.elte.hu/

ABSTRACT

In my paper, I examine how Archimedes 'parabola quadrature and Newton's method of derivation apply infinitesimals, and what has become the destiny of these concepts in the history of analysis.

Keywords: infinitesimal, the birth of calculus

KIVONAT

Írásomban azt vizsgálom, hogy Archimédesz parabola quadratúrája és Newton deriválási módszere hogyan alkalmazza az infinitézimálisokat, és mi lett ezen fogalmak sorsa az analízis történetében.

Kulcsszavak: infinitézimálisok, az analízis megszületése

1. BEVEZETÉS

A diákok számára az analízis nehezen érthető matematika tantárgy. Úgy gondolom, ebben nagy szeree lehet azoknak az eltitkolt módszereknek, amelyek kísérték e tudományág történetét. Milyen titkok fokozzák a diákok bizonytalanság érzetét? Mi a szerepe a végtelen kicsi menyiségeknek, vagyis az infinitézimálisoknak az analízis történetében? Archimédesz szerint infinitézimálisok nem léteznek. Miért lehetett mégis használni azokat fontos problémák megoldására? Milyen matematikai megoldások születtek az ellentmondás megszüntetésére? A szigorúan megalapozott analízis elveszítette szemléletességét. Visszaszerezhető-e az oktatásban az analízis szemléletessége?

2. ARCHIMÉDESZ: PALIMPSEST

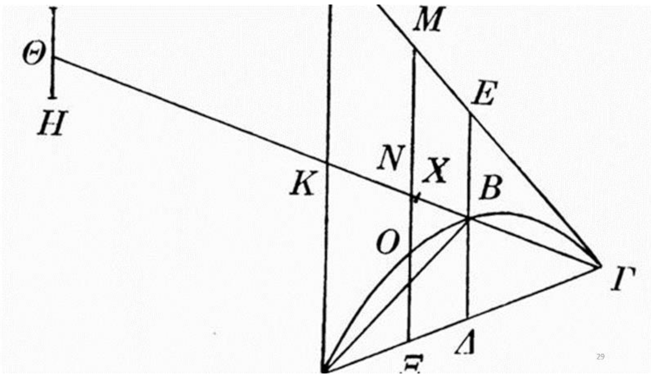
Az antik görög matematikában két fejlődési utat megfigyelhetünk. Az egyik a geometria, és ezen keresztül az egész matematika axiomatikus felépítése, amely első, kikristályosodott formáját már Euklidész Elemek című művében elérte. A másik út a problémák heurisztikus megoldása. Ezek az eljárások matematikailag nem voltak korrekt módon megfogalmazva, de tehetséges matematikusok kitünően alkalmazták azokat, és pontos eredményeket értek el általa.

Euklidesz 9. axiómája kimondja, hogy a rész kisebb, mint az egész. Ez az állítás lényegében kizárta a végtelennel valófoglalkozást a matematikai kutatások közül. Hiszen Cantor éppen így definiálta a végtelen halmazt: van önmagával ekvivalens valódi részhalmaza.

Archimédesz fogalmazta meg a később róla elnevezett axiómát: bármely kicsi (pozitív valós) számot ha elegendő sokszor összeadunk tetszőleges előre adott számnál nagyobb számot kaphatunk. Ezzel megállapította, hogy a számok között nincsenek infinitézimálisok, vagyis nincs olyan végtelenül kicsi szám, amelyekből végtelen sokat összeadva véges számot kapunk.

Mindezek ellenére Archimédesz az emelőelvre és az infinitézimálisokra alapozva határozta meg például a kúpszelet területét, majd az így kapott érték helyességét euklideszi módszerekkel bizonyította. Bizonyításra a „kimerítés" módszerét alkalmazta, ez olvasható volt kéziratos sokszorosításban már az ókorban, és nyomtatásban az 1897-ben megjelent összegyűjtött műveiben, The Works of Archimedes, https://www.aproged.pt/biblioteca/worksofarchimede.pdf .

De hogyan jutott el az eredményhez, amit bebizonyított? Megírta ezt is a Módszerről című művében, amit valószínűleg nem akart nyilvánosságra hozni. De fennmaradt és ma is olvasható. A papírusz, amelyen a Módszer megtalálható 6 másik írásával együtt, 975-ben íródott. 1229-ben egy görög szerzetes lekaparta a szerinte értéktelen szöveget és imádságokat írt rá. Az 1840-es években egy német tudós a többi görög egyházi irat között megnézte, és észrevette az eredeti matematikai szöveget. 1906-ban több kutató együttműködésével sikerült megfejteni a szövegek tartalmát. http://collegequarterly.ca/2013-vol16-num02-spring/vallianatos.html. A történet 2006-ban fejeződött be, amikor rötgensugarak segítségével a kézirat minden elemét feltárták.



Archimédsz ábrája, amely azt mutatja,
hogy a parabolaszelet területe hogyan „mérhető meg” mérleggel, azaz egy egykarú emelővel.

A matematikai és fizikai elveken alapuló teljes levezetés olvasható egy interaktív diasorozatban. Archimedes Mechanical Method with Indivisibles, The Method, Prop. 1© by Henry Mendell (Cal. State U., L.A.) https://web.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient%20Mathematics/Archimedes/Archimedes%20Method/Prop1/ArchMethodProp1.html

A heurisztikus út búvópatakként szelte át az évezredek matematikatörténetét. Sokszor előkerültek infinitézimálisokra alapozott, kisebb jelentőségű eredmények. És előkerült Archimédesz módszerekről szóló munkája is, 1906-ban sikerült a kutatóknak elolvasniuk. Így ennek az írásnak nem volt bizonyítható hatása a matematika fejlődésére, utólag meglepetten vizsgálhatjuk annak tartalmát.

3. NEWTON: PRINCIPIA

Newton matematikai írásai matematikatörténészek szerint az eszközök barokkos gazdagságát tartalmazza. Newton's Toolbox, By Paolo Mancosu, 2009, https://www.americanscientist.org/article/newtons-toolbox. Két matematikai kézirata olyan elismert volt, hogy 26 évesen, 1669-ben professzori kinevezést kapott. De Analysi per Aequationes Numeri Terminorum Infinitas (1711), De methodis serierum et fluxionum (1671, 1736). Nyomtatásban csak jóval megírásuk után jelentek meg. Ennek több oka is volt. Egyrészt a kiadáshoz magának a szerzőnek kellett előre megszereznie a szükséges számú megrendelőt. Másrészt, ami nem független az előző októl, Newton nem volt elégedett azzal, ahogyan ő az infinitézimálisokat kezelte. A nagy természetfilozófiai művében Philosophiae Naturalis Principia Mathematica az általa alkalmazott deriválási eljárás a maga tisztaságában látszik. Máskor Newton körülírásokkal próbálta érzékeltetni azt a fogalmat, amit most határértékként értelmezünk. “Az utolsó hányadosok, amelyekben a mennyiségek eltűnnek, pontosan szólva, nem az utolsó mennyiségek hányadosai, hanem határok, amelyek felé ezen mennyiségek hányadosai határtalanul közelednek és amelyeket bár minden adott különbségnél jobban megközelítenek, mégsem haladnak túl, sem el nem érnek, amíg a mennyiségek nem csökkennek a végtelenségig.” - idézi Sain Márton, Nincs királyi út, https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/nincs-kiralyi-ut/az-analizis-fejlodesenek-tortenete/a-matematikai-analizis . Modern átírásban:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2x \cdot dx - (dx)^2}{dx} = 2x$$

A logikai tisztázatlanságot Berkeley püspök, filozófus, jól képzett matematikus is észrevette és kigúnyolta. A matematikai tisztaság megkövetelése mögött ideológiai-politikai célok is voltak. Berkeley azzal érvelt, hogy a vallás és a matematika tudományos megalapozottsága egyformán bizonytalan, más megközelítésben egyformán biztos. Gondolatait a The Analyst című művében is kifejtette. Magyarul olvasható Faragó Szabó István bevezetésével, http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/limes/analizalo1.html

A Principia első kiadása - a szakértők feltételezése szerint - 250 és 400 közötti példányszámban készülhetett. Egyik példányát a marosvásárhelyi Bolyai Téka őrzi. Megjelenésének 200. évfordulóját a Természettudományi Közlöny Heller Ágost részletes tanulmányával ünnepelte.

Érdekes módon Leibniz, aki Newtonnal egyidőben és tőle függetlenül felfedezte az integrál és differenciálszámítást, miközben használta az infinitézimálisokat, azt állította, hogy az infinitézimálisok nem léteznek, de jól használható eszközök a számításokban. Leibniz Varigonhoz 1702-ben írt leveléből idézte George MacDonald Ross. http://lexicon.cnr.it/index.php/DDL/article/view/46/29

4. MEGOLDÁSOK AZ INFINITÉZIMÁLISOK PROBLÉMÁJÁRA

A határérték fogalom megalkotásához hosszú út vezetett. Az érintő szemléletes fogalma régóta ismert volt, ennek definiálása merült föl először problémaként. Az ókorban és sokáig azután a kör és a kúpszeletek érintőjét definiálták. Fermat a szelőkön keresztül jutott el az érintő általánosabb fogalmához. Descartes úgy gondolta "And I dare say that this is not only the most useful and most general problem in geometry that I know, but even that I have ever desired to know“ (Merem mondani, hogy ez a geometria legfontosabb problémája, és számomra is ez a legfontosabb) idézi Lectures in the History of Mathematics című könyvében H. J. M. Bos. Végül a definíció nem a geometriában, hanem az analízisben született meg a XIX. században. Cauchy fogalmazta meg a határérték fogalomra építve. Bolzano, Cauchy, Weierstrass dolgozták ki a határérték epszilon-delta definícióját. A görbék algebrai egyenleteinek megadásából (és a mozgás leírására alkalmas gráfokból) fejlődött ki a modern függvényfogalom Euler, Fourier, Cauchy, Lobachevsky, Dirichlet, Dedekind, Hardy munkája nyomán. Az analízis axiomatikus megalapozásához szükséges volt még a valós számhalmaz axiomatikus leírása és a halmazelmélet bizonyos elemeinek felhasználása. (Az analízis axiomatikus megalapozása lehetővé tette szemléletes fogalmak matematikai definiálását. Ennek egyik érdekes példája az intervallumon való folytonosság, ami igényli a pontbeli folytonosság fogalmát. Így a modern függvényfogalom, amelynek hátterében a tetszőleges hozzárendelés áll és a pontbeli folytonosság definíciója alapján létezik olyan, minden valós számon értelmezett függvény, amely csak egyetlen pontban folytonos.)

Az infinitézimálisok okozta problémák kiküszöbölésének másik lehetséges módja a rájuk épített axioma rendszer, amelyet Abraham Robinson dolgozott ki az 1960-as években (Csirmaz, 1999).

5. KONKLÚZIÓ

A szemléletesség és a matematikai szigorúság harmoniájának megvalósíthatósága nehéz feladatnak tűnik, de nem megoldhatatlan. Ugyanazokat a problémákat felvethetjük a diákoknak is, amelyek elvezettek az integrál- és differenciál számításhoz. A mindennapi élet szélsőérték kérdései, alakzatok területének összehasonlítása, valamint a függvények menetének és az adott pontbeli érintő meredeksége kapcsolatának megfigyelése jól motiválhatja a diákokat a matematikai háttér megismerésére. Megfigyeléseket és kísérleteket végezhetnek modern informatikai eszközök segítségével. Úgy gondoljuk, hogy kezdők számára a történeti kérdések nagyon hasznosak, és a válaszokat a modern tudományban érdemes keresni.

IRODALOM

1. CSIRMAZ László, 1999: Nemsztenderd Analízis, TypoTeX Kiadó, Budapest, http://mek.oszk.hu/05100/05182/05182.pdf
2. DAVIS, Philip J. HERSH, Reuben 1984: A matematika élménye, Műszaki Könyvkiadó, 459 o. Budapest.
3. SAIN Márton, 1986, Nincs királyi út!, Gondolat Kiadó, Budapest https://mek.oszk.hu/05000/05052/pdf/