Kvaternió kvaterka

Historical discussion on the quaternions

WESZELY Tibor emlékére

dr. SZABÓ Péter Gábor

Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi és Informatikai Kar
Informatikai Intézet, Számítógépes Optimalizálás Tanszék
H-6720 Szeged, Árpád tér 2, pszabo@inf.u-szeged.hu

ABSTRACT

Some historical sources said that János BOLYAI in his mathematical research came close to the theory of quaternions. Another investigation claims the opposite. In the Appendix there is no words of this subject, so BOLYAI's research can be learned by studying his manuscript legacy. The present paper deals with whether János BOLYAI had anything to do with the formation of quaternions.

KIVONAT

BOLYAI Jánosról több helyen is azt írják, hogy matematikai vizsgálatai során közel került a kvaterniók elméletéhez. Más kutatás azonban ennek pont az ellenkezőjét állítja. Az Appendixben nem esik szó a témáról, így BOLYAI vizsgálatait a kéziratos hagyatékának tanulmányozásával ismerhetjük meg. A jelen dolgozat azzal foglalkozik, hogy volt-e köze BOLYAI Jánosnak a kvaterniók kialakulásához.

Kulcsszavak: algebra, kvaterniók, BOLYAI János, W. R. HAMILTON, C. F. GAUSS.

1. BEVEZETŐ GONDOLATOK

Sir William Rowan HAMILTON (1805–1865) a híres ír matematikus, fizikus és csillagász egész életében Dublinban működött. Már gyermekkorában kiváló nyelvtehetsége mellett hamar a matematika iránt is érdeklődni kezdett, eleinte főleg mechanikával és csillagászattal foglalkozott. Huszonkét éves korában nevezték ki a Trinity College csillagászprofesszorának. 1834-ben egy előadásában a komplex számokat már rendezett valós számpároknak tekintette [6]. Ennek a gondolatnak a továbbvitele folytán próbálta meg kidolgozni a számhármasoknak, valamint a számnégyeseknek, a kvaternióknak az algebráját.

1843. október 16-án HAMILTON a feleségével otthonából elindult, hogy részt vegyen az Ír Királyi Akadémia Tanácsának ülésén, ahol ő volt az elnök. Beszédes asszonya társaságában a saját gondolataiba elmerült tudósnak, ahogyan a Királyi Csatorna mentén haladva eljutottak a Broome-hídhoz, mint a villámcsapás jutott eszébe a gondolat, hogyan is lehetne a számnégyesek esetén a szorzást definiálni, amely aztán a kvaterniók elméletéhez vezette el őt. Később levélben meg is írta egyik fiának, hogy még bele is véste a hídba a talált alapképleteket. Ennek emlékét ma tábla őrzi.

HAMILTON a kvaterniókról 1844-től kezdett el publikálni [7]. Nyolcszáz oldalas *Elements of Quaternions* című nagy könyve röviddel halála után, fia szerkesztésében jelent meg 1866-ban [8].

2. MIK AZOK A KVATERNIÓK?

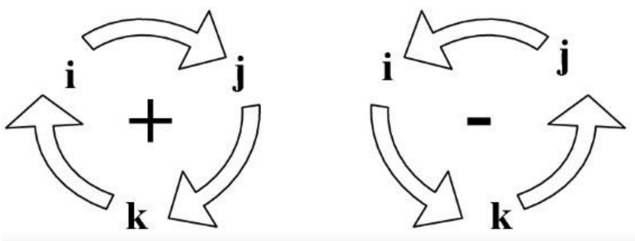
A matematika különös tudomány. Az iskolában egyszer azt mondják, hogy negatív számból nem lehet négyzetgyököt vonni, majd később azt, hogy vezessük csak be az $i = \sqrt{-1}$ képzetes egységet (vagyis $i^2 = -1$) és bővítsük vele számfogalmunkat, számoljunk komplex számokkal! A komplex számoknak többféle alakja van, talán a legegyszerűbb az algebrai alak: $a + bi$, ahol a és b tetszőleges valós számok. A komplex számokat össze lehet adni, ki lehet vonni őket egymásból, szorozni és osztani is lehet velük, sőt a klasszikus matematikai analízis, a differenciál- és integrálszámítás mellett ki lehet dolgozni a komplex függvénytant is, vagy éppen a számelméletben a komplex egészek aritmetikáját.

Hosszú fejlődés eredménye volt, amíg az emberiség a ma használatos számfogalmat felépítette, bővítette. Meg kellett szokni, el kellett fogadni például a negatív számokat is, ami ma már sokaknak teljesen természetes. Bár azért hall néha olyant az ember, hogy „*Na, én azt sosem értettem az iskolában, hogyan lehet hat almából nyolcat elvenni*”, vagy „*Ha csak hatan vannak a buszon, akkor hogyan lehet az, hogy nyolcan leszálljanak*?”. A vicces válasz: „*Ilyenkor még két embernek fel kell szállnia, hogy ne legyen senki a buszon*”. No de félretéve a tréfát, a számfogalom fejlődése a matematika történetében a természetes számok, a negatív egész számok, a racionális és irracionális számok, a valós számok és a komplex számok mellett feltette a kérdést, hogy vajon lehet-e még tovább bővíteni a számok világát? Bizonyos értelemben lehet, de bizonyos értelemben meg nem lehet. Ha ragaszkodunk a megszokott algebrai törvényekhez, akkor úgy bővíteni, hogy minden alaptörvény érvényben maradjon, úgy tovább már nem lehetséges és ezt be is lehet bizonyítani, amit a német matematikus Ferdinand Georg FROBENIUS (1849–1917) meg is tett még a 19. században.

Viszont ha megengedjük, hogy esetleg csorbuljanak a szabályaink (a számtest algebrai struktúrája helyett megelégszünk ferdetesttel, vagyis elengedjük a szorzás kommutativitását), akkor lehetséges a bővítés és ez elvezet minket a kvaterniók világába. A komplex számok esetén egyetlen képzetes egységet vezettünk be, amit i-vel jelöltünk. A kvaternióknál az i-n kívül még két további új egységünk van: j és k. Így a kvaterniók a következő formában írhatók fel: $a + bi + cj + dk$, ahol a, b, c és d tetszőleges valós számok, az i, j és k egységek pedig a következő összefüggéseket teljesítik (amelyek az alábbi szorzási ábrák segítségével könnyen meg is jegyezhetők):

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \text{ (HAMILTON ezt rótta fel a hídra)}$$

$$ij = k,\ \ jk = i,\ \ ki = j,\ \ ji = -k,\ \ kj = -i,\ \ ik = -j.$$



A kvaterniók elméletét a matematikán és a fizikán kívül más területeken is használják, például számítógépes grafikai programokban, illetve robotok vezérlésénél. Elgondolkodtató kérdés viszont, hogy vajon igaz-e, hogy BOLYAI János (1802–1860) is közel került a kvaterniók elméletéhez? Az *Appendix*ben erről nem ír. De vajon a lipcsei pályázatra 1837-ben beküldött *Responsio*ja vagy a kéziratos hagyatéka mit mond erről?

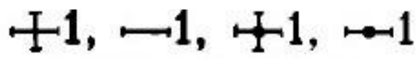
3. BOLYAI JÁNOS ÉS A KVATERNIÓK?

A világhálón is elérhető CSEKE Vilmos (1915–1983) kolozsvári matematikaprofesszor írása, amely a Korunk folyóirat 1975. júliusi számában jelent meg *Új hazai eredmények a BOLYAI-kutatásban* [4] címmel. A dolgozatban BOLYAI János *Responsio* című pályamunkájáról ezt olvashatjuk: *„Ebben a munkájában BOLYAI a mai kvaternió-elmélet (a komplex számok négy egység bevezetésével történő értelmezése) alapjait vázolta fel, a bírálóbizottság azonban a túlságosan tömören megfogalmazott és az Appendixre is hivatkozó dolgozatot valószínűleg meg sem értette, és ezért nem díjazta. Ezzel szemben említi TORÓ a modern tudomány késői »igazságszolgáltatásaként«, hogy ma a neutrinó-terek spinor-egyenletét kvaternió formában írják fel. Így találkozik tehát BOLYAI János két remekműve a modern fizikában.”*

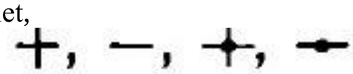
TORÓ Tibor (1931–2010) temesvári fizikus említett tanulmányában a következőket írta [10]: „Ha azonban egy kicsit részletesebben megvizsgáljuk a kvaterniók felfedezésének körülményeit és az ezzel kapcsolatos irodalmat, akkor rájövünk, hogy maga a felfedezés nem ennyire egyértelműen fűződik HAMILTON nevéhez. Ugyanis azt már kevesebben tudják és ismerik el, hogy a kvaternió fogalmának bevezetéséhez BOLYAI Jánosnak is lényeges hozzájárulása van. Sőt mit több, egyes szerzők szerint [3] BOLYAInak a kvaterniók felfedezésében, prioritása van HAMILTONnal szemben.”

TORÓ idézi még ALEXITS György (1899–1978) matematikus véleményét is, miszerint BOLYAI János „*kétségkívül a komplex számok úgynevezett kvaterniókon alapuló elméletének egyik felfedezőjévé vált.*” Gondolatmenetét a következőkkel zárja: „*Itt most nem áll szándékunkban részleteiben is tovább elemezni a kvaternió ágas-bogas kérdéseit. Csak hangsúlyozni kívántuk BOLYAI János jelentős hozzájárulását e tudományág kialakulásához, főleg azért mert nemcsak életében, de sajnos halála után sem ismerték el eléggé, hogy BOLYAI W.R. HAMILTON mellett a kvaterniók elméletének egyik megalapítója.*”

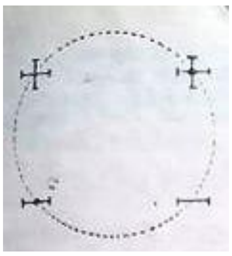
Mire utalhatnak a fenti sorok? Nyilván a *Responsio*ra, hiszen abban BOLYAI János valóban négy külön egységet vezet be rendre a $+1, -1, +i, -i$-re az alábbi jelöléseket használva,

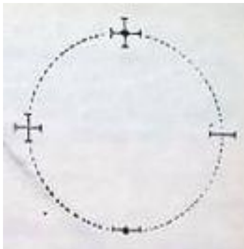


valamint további négy műveleti jelet,

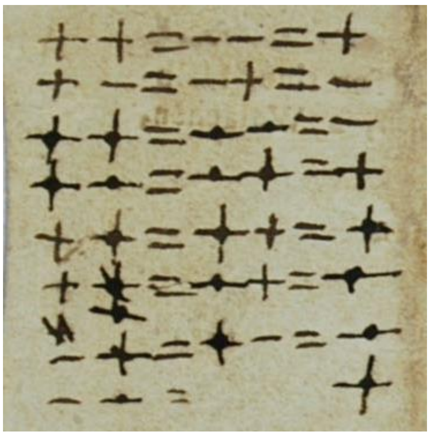


rendre a $+1, -1, +i, -i$-vel való szorzásra. Érezhető ebben apjának BOLYAI Farkasnak (1775–1856) a negatív mennyiségekre vonatkozó elméletének továbbfejlesztése, ahogyan Paul STÄCKEL (1862–1919) német matematikus és matematikatörténész is írta [11]: „*az atya itt is a fia elé világított*”. Ha valaki szemügyre veszi még a *Responsio* szorzási képleteit, sőt a fenti négy jelnek körökön való szemléltetését, azok a kvaterniók hasonló képleteire és köreire emlékeztethetik.



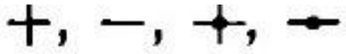


A kéziratos hagyatékban [2] a szorzási táblának egy majdnem teljes változatát is megtaláltuk a BJ 1141/1 jelzetű oldalon, aminek érdekessége, hogy BOLYAI János ezt egy 1844. márciusi lottó (BJ 1141/1v) hátoldalára jegyezte fel. (A teljes táblázat 16 szorzást tartalmazna az összes lehetőséget figyelembe véve. Itt egy szorzás hiányzik csak, a $-i \times (-1)$, a *Responsio*ban persze benne van az is.)



BOLYAI a *Responsio*ban megjegyzi, hogy pontosan 4 egységet kell bevezetni, sőt azt is írja „*azért nem többet vagy kevesebbet, mert a vizsgálatból majd kitűnik, hogy csak négyre van szükség*”, bár ezt később nem bizonyítja. STÄCKEL azonban még megjegyezte, hogy talált a BOLYAI-hagyatékban egy olyan 1830 márciusából származó katonai jelentést, aminek hátoldalán BOLYAI megpróbálta a szorzást olyan rendszerben magyarázni, amely 6 egységből alakul és megvizsgálja mi történik akkor, ha két ilyen egység szorzatát ismét valamely egységgel tesszük egyenlővé. Vizsgálatának eredményeként megjegyzi, hogy az ilyen rendszerekben elvesznek a legszebb következtetések, habár lehetetlenséget nem tartalmaznak.

Vegyük ismét számba a fentieket! BOLYAI János négy egysége a kvaterniók egységeinek felelnek meg? BOLYAI a *Responsio*ban a P, Q, R, S betűket vezeti be az alábbi jelekhez:



Vajon tudunk-e olyan megfeleltetést létesíteni a kvaternió egységei és BOLYAI egységei között, amelyek összhangban vannak a számolási szabályokkal? Nem tudunk. BOLYAI egységei nem elégítik ki a kvaterniók szorzási szabályait. Ha BOLYAInál például az R-hez az i egységet, S-hez a k egységet feleltetjük meg akkor egyaránt teljesülnek a kvaternióknál és BOLYAI-nál előírt $R^2 = i^2 = S^2 = k^2 = -1$ összefüggések. BOLYAInál az $RS = SR = P$ is teljesül, viszont ez a kvaternióknál már nem állhat fenn ($ik \neq ki$), ott a szorzás nem kommutatív, a kvaternió egységeket fordított sorrendben összeszorozva az eredmények egymás ellentettjei. A BOLYAI által bevezetett egységek szorzótábláját összehasonlítva a kvaterniók táblázatával (itt most a $P = 1, Q = i, R = j, S = k$ hozzárendelést használva) látható, hogy bár lehetnek azonos eredmények benne (szám szerint 9), de a két táblázat mégsem azonos. A legfeltűnőbb, hogy a kvaterniók táblázata nem is szimmetrikus a főátlóra, mivel a művelet nem kommutatív.

	P	Q	R	S
P	P	Q	R	S
Q	Q	P	S	R
R	R	S	Q	P
S	S	R	P	Q

	P	Q	R	S
P	P	Q	R	S
Q	Q	$-P$	S	$-R$
R	R	$-S$	$-P$	Q
S	S	R	$-Q$	$-P$

BOLYAI egységeinek szorzótáblája (balra) és a kvaternió szorzótábla (jobbra)

Ahogyan már WESZELY Tibor (1936–2019) marosvásárhelyi BOLYAI-kutató, matematikus és matematikatörténész is felhívta a figyelmet a *BOLYAI János matematikai munkássága* című könyvében [12] téves az a következtetés, hogy „*BOLYAI a kvaterniók elméletének egyik felfedezője*”. „*Jelentős azonban az a kijelentése, amelyet a Responsio utolsó paragrafusában is megismétel: „… (tetszés szerint) a mennyiségeknek akárhány nemét [s ennek alapján egységét] vezethetjük be; csakhogy ez [a komplex számoknál] nem szükséges*.”

Magam is úgy gondolom, hogy BOLYAI Jánost túlzás a kvaternió-elmélet történetében külön kiemelni, viszont a komplex számok elméletének történetében természetesen igen is helye van!

4. GAUSS ÉS A KVATERNIÓK?

KISS Elemér (1929–2006) marosvásárhelyi BOLYAI-kutató matematikus Matematikai kincsek BOLYAI János kéziratos hagyatékából című könyvében megjegyzi, hogy HAMILTON, „amikor a kvaterniókról szóló könyvét megküldte GAUSSnak, hasonló választ kapott, mint BOLYAI az Appendixre.” Sejthető, hogy mi lehetett a válasz. Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) nem egy matematikusnak felelt úgy, amikor az elküldte neki munkáját, hogy annak tartalmát ő már ismerte. Ugyan nem tartozik szorosan a témánkhoz, de megjegyezzük, hogy GAUSS az orosz Nyikoláj Ivánovics LOBACSEVSZKIJ (1792–1856) művével kapcsolatban is így nyilatkozott egyik levelében: „LOBACSEVSZKIJ művében nem találtam új eredményt, bár a felépítése más megközelítést követ, mint az enyém”. Vajon GAUSS számára tényleg nem volt újdonság HAMILTON kvaternió-elmélete?

GAUSSról azt mondják, hogy 1819 körül szintén felfedezte a kvaterniók elméletét, ám ez a munkája csak 1900-ban jelent meg [5]. HAMILTON hallott ilyesmiről maga is, de amint egyik leveléből tudjuk, nem hitte el. Számomra az különösen meglepő, hogy ha Gauss valóban a kvaternió-elméletet fedezte itt fel, akkor STÄCKEL, aki GAUSSnak a szóban forgó dolgozatát szerkesztette és még megjegyzést is írt hozzá, vajon miért nem említette ezt meg a BOLYAI-monográfiájában. GAUSS térbeli transzformációkat vizsgál, aminek persze van kapcsolata a kvaterniókkal, no de hol van az elmélet algebrájának részletes bemutatása? Véleményem szerint HAMILTON kétkedése jogos volt.

Ilyen erővel persze Leonhard EULER (1707–1783) svájci matematikus is előfutára a kvaterniók elméletének, hiszen az általa Christian GOLDBACH (1690–1764) porosz matematikusnak 1748. május 4-én írt levelében beszámolt az alábbi nevezetes azonosságáról:

$$
\begin{aligned}
&(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = \\
&(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4)^2 + \\
&(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)^2 + \\
&(a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2)^2 + \\
&(a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1)^2.
\end{aligned}
$$

Ez az összefüggés szintén rokonságban van a kvaterniókkal. (Ilyen formula, ahol két n-tagú négyzetösszeg szorzata ismét n-tagú négyzetösszeg, csak az $n = 1,2,4$ és 8 esetén lehetséges.) Olinde RODRIGUES (1795–1851) francia bankár és matematikus 1840-ben vektorok három dimenzióban való forgatására használt a kvaterniókkal rokon képletet, őt szintén a kvaternió-elmélet úttörői között tartják számon [1].

IRODALOMJEGYZÉK

1. ALTMANN, Simon L. (1989): HAMILTON, RODRIGUES, and the Quaternion Scandal, *Mathematics Magazine*, Vol. 62. No. 5, 291–308.
2. *BOLYAI János kéziratos hagyatéka*, Teleki-Bolyai Könyvtár, Marosvásárhely.
3. CÂMPAN, Florica T. (1971): *Bolyai sau aventura geometriilor neeuclidiene*, Albatros, Bucureşti.
4. CSEKE Vilmos (1975): Új hazai eredmények a Bolyai-kutatásban, *Korunk*, XXXIV. évf., 7. szám, 566–567. http://korunk.org/letoltlapok/zh_Korunk1975julius.pdf
5. GAUSS, C. F. (1900): Mutationen des Raumes (c. 1819). In: Martin BRENDEL (szerk.). *Carl Friedrich GAUSS Werke*. 8. kötet. A cikket szerkesztette P. STÄCKEL, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 357–361. Göttingen. https://1lib.eu/book/439421/d2ba4f
6. HAMILTON, W. R. (1835): *On Conjugate Functions, or Algebraic Couples.* Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science (Edinburgh, 1834). John Murray, 1835, 519–523. London, https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/BACouples/
7. HAMILTON, W. R. (1844): On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra. *Philosophical Magazine and Journal of Science* Vol. XXV, 489–495. https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/QLetter/QLetter.pdf
8. HAMILTON, W. R. (1866): *Elements of Quaternions*, ed. by his son W. E. HAMILTON, Longmans, Green, & Co., London. https://books.google.hu/books?id=fIRAAAAAIAAJ
9. KISS Elemér (1999): *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából*, Typotex, 2., bővített kiadás: 2005. Budapest. https://mek.oszk.hu/05300/05321/05321.pdf
10. NEUMANN Mária – SALLÓ Ervin – TORÓ Tibor (1974): *A semmiből egy új világot teremtettem*, Facla Könyvkiadó, Temesvár.
11. STÄCKEL Pál (1914): *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai* 1-2, Magyar Tudományos Akadémia, Budapest. https://mek.oszk.hu/14700/14732/14732.pdf
12. WESZELY Tibor (1981): *Bolyai János matematikai munkássága*, Kriterion, Bukarest.