

Némely adalék Bolyai Farkas professzor sokszög-átdarabolási tételéhez,

avagy másként is bizonyítható ez a szép tulajdonság, mint tette a Református Kollégium neves professzora egykoron, továbbá valamely rejtett és igencsak meglepő kapcsolat e geometriai puzzle és a négyzetgyökvonás aritmetikai algoritmusa között

XVIII. Tudomány- és Technikatörténeti Konferencia
Kolozsvár, 2025 június 26-29.

HORVÁTH Sándor
shorvath@ms.sapientia.ro

Sapientia EMTE, Marosvásárhelyi Kar

Bevezetés a témakörbe

Terület-mérés és területtartó átdarabolás

Bolyai Farkas sokszög-átdarabolási tétele

Az eredeti bizonyítás

Egy másik bizonyítás

Négyzetgyökvonás... ollóval!

esetleg... fűrészeléssel!

Hilbert és átdarabolás 3D-ben

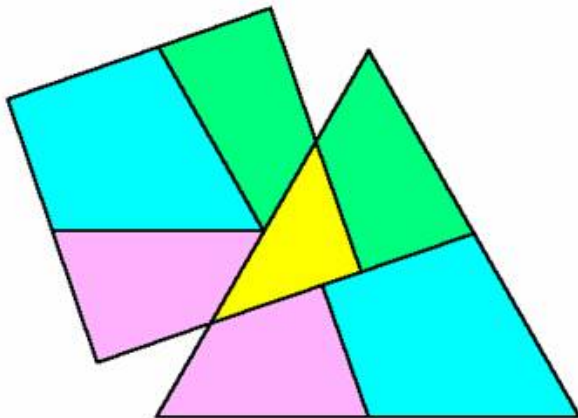
Bonus

Ezt mondta a DeepSeek AI

Átdarabolás az óvodában

Bevezetés a témakörbe

A kirakós-játék, puzzle¹



<http://www.jgypk.hu/tanszek/matematika/feladatok/darabol/index.html>

¹Szilassi Lajos

Bevezetés a témakörbe

Terület-mérés és területtartó átdarabolás

Bolyai Farkas sokszög-átdarabolási tétele

Az eredeti bizonyítás

Egy másik bizonyítás

Négyzetgyökvonás... ollóval!

esetleg... fűrészeléssel!

Hilbert és átdarabolás 3D-ben

Bonus

Ezt mondta a DeepSeek AI

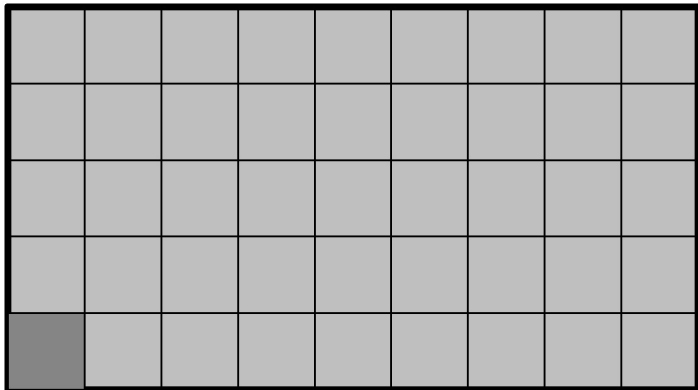
Átdarabolás az óvodában

Területmérés = *kicsempőzés* egy mértékegységgel és...

$T=?$



Területmérés = *kicsempőzés* egy mértékegységgel és...

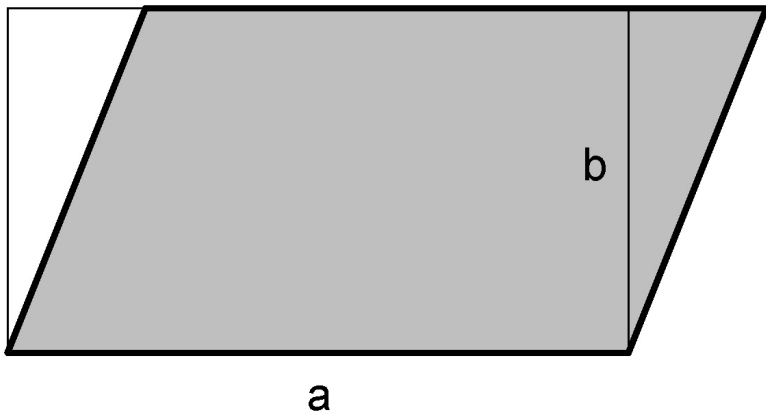


$T=9 \times 5$

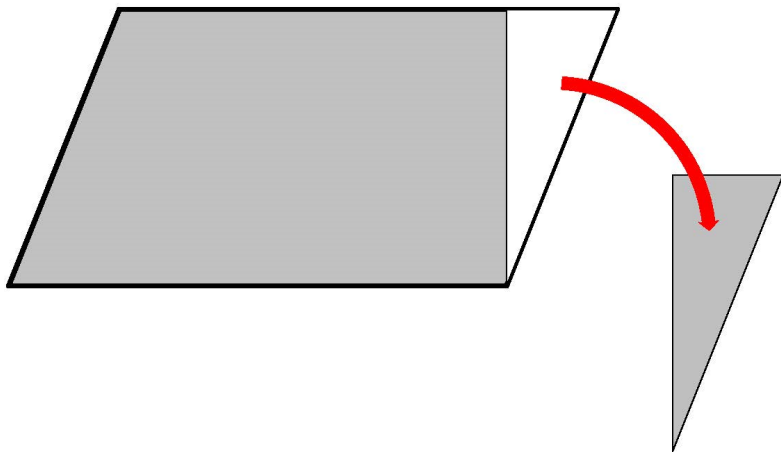
$$T=?$$



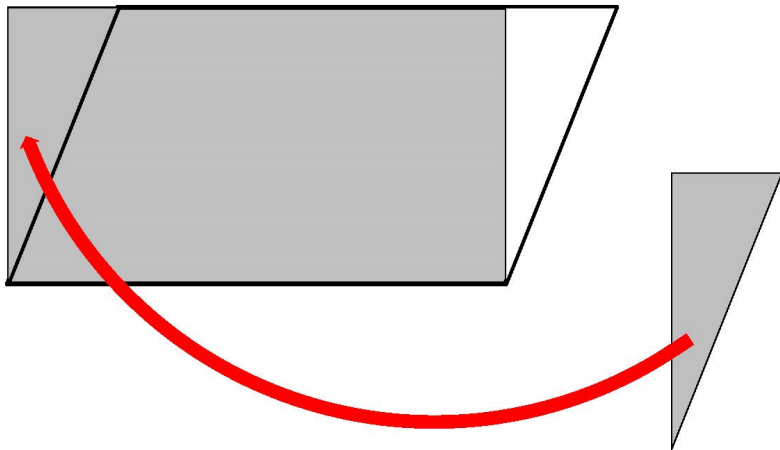
$$T=ab$$



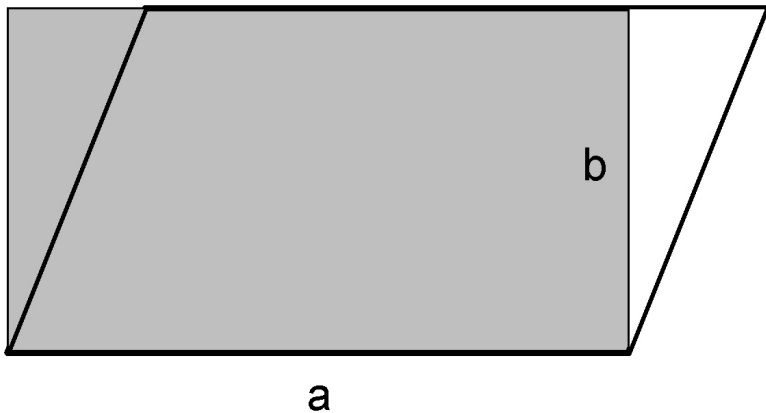
$T=?$



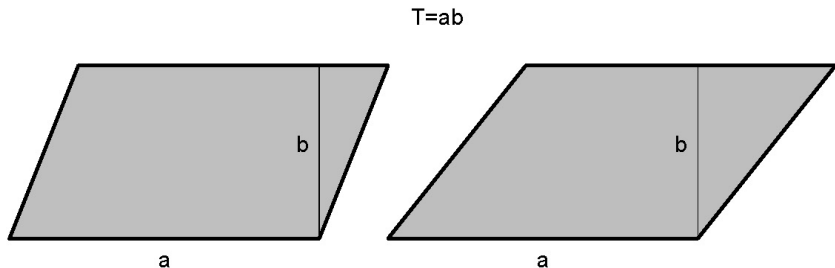
$T=?$



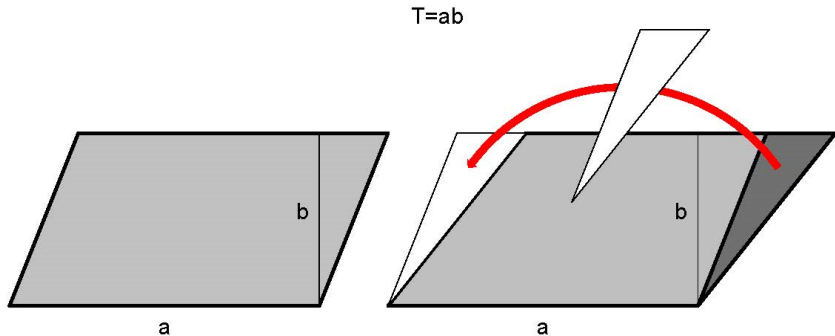
$$T=ab$$



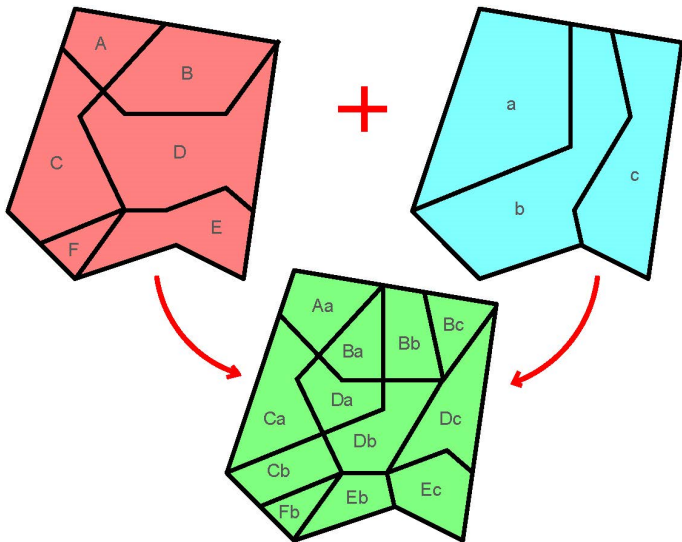
A paralelogramma egyik oldala – a *terület* megtartásával –
elcsúsztatható



A paralelogramma egyik oldala – a *terület* megtartásával – *elcsúsztatható*



Két különböző *feldarabolásból átdarabolás* kapható



Megjegyzések A

- A feldarabolás *oda-vissza* érvényes.
- Az átdarabolás *oda-vissza* érvényes.
- Az feldarabolás/átdarabolás *transzítív*.

Bolyai Farkas

sokszög-átdarabolási tétele

Tétel 1 (Bolyai Farkas sokszög-átdarabolási tétele)

Egyenlő területű sokszögek *átdarabolhatók* egymásba.

Bevezetés a témakörbe

Terület-mérés és területtartó átdarabolás

Bolyai Farkas sokszög-átdarabolási tétele

Az eredeti bizonyítás

Egy másik bizonyítás

Négyzetgyökvonás... ollóval!

esetleg... fűrészeléssel!

Hilbert és átdarabolás 3D-ben

Bonus

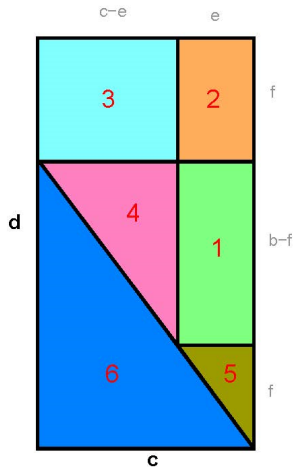
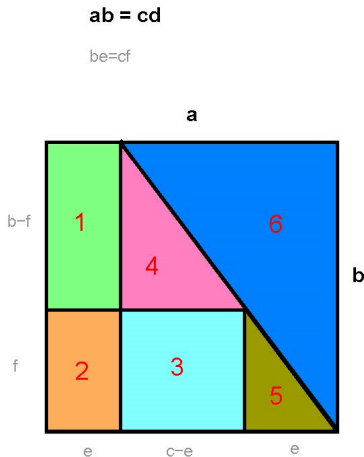
Ezt mondta a DeepSeek AI

Átdarabolás az óvodában

Adott két különböző alakú, de *egyenlő területű* sokszög.

- Mindkettőt feldaraboljuk *háromszögekre*.
- Az egyik sokszög minden egyes háromszögét feldaraboljuk – a másik sokszög feldarabolása háromszögeinek *területarányában* – kisebb háromszögekre. Ugyanezt tesszük a másik sokszög minden egyes háromszögével.
- Ezáltal az egyik sokszög minden egyes apró háromszögének a másik sokszög apró háromszögei közül *pontosan egy feleltethető meg*, amelynek ugyanakkora a területe.
- Ezek a háromszögpárok *téglalapokká* darabolhatók (lásd lentebb).
- Az *egyenlő területű* téglalapok *egymásba darabolhatók* az alábbi felosztással.

Azonos területű téglalapok egymásba darabolhatók²



²Nagy pillanatok a matematika történetében, Gondolat Kiadó, Budapest, 1981
Császár Ákos, *Hogyan látta Hilbert a matematika jövőjét*, pp.166-190

Bevezetés a témakörbe

Terület-mérés és területtartó átdarabolás

Bolyai Farkas sokszög-átdarabolási tétele

Az eredeti bizonyítás

Egy másik bizonyítás

Négyzetgyökvonás... ollóval!

esetleg... fűrészeléssel!

Hilbert és átdarabolás 3D-ben

Bonus

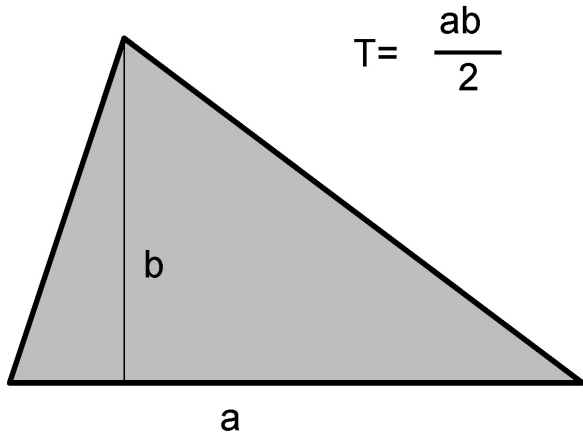
Ezt mondta a DeepSeek AI

Átdarabolás az óvodában

Adott két különböző alakú, de egyenlő területű sokszög.

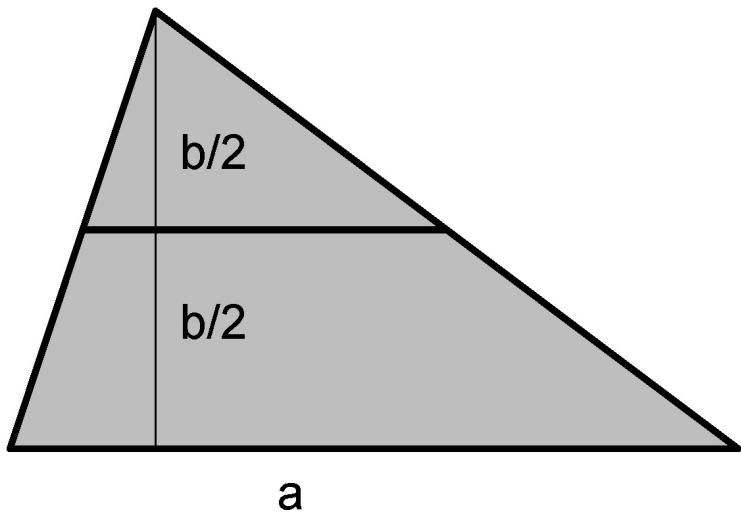
- Minden háromszög átdarabolható egyik oldalával közös oldalú téglalappá.
- Minden háromszög átdarabolható egyik oldalával közös oldalú háromszöggé.
- Egyenlő területű háromszögek átdarabolhatók egymásba.
- Egyenlő területű sokszögek átdarabolhatók egymásba.

Minden *háromszög* átdarabolható *téglalappá*

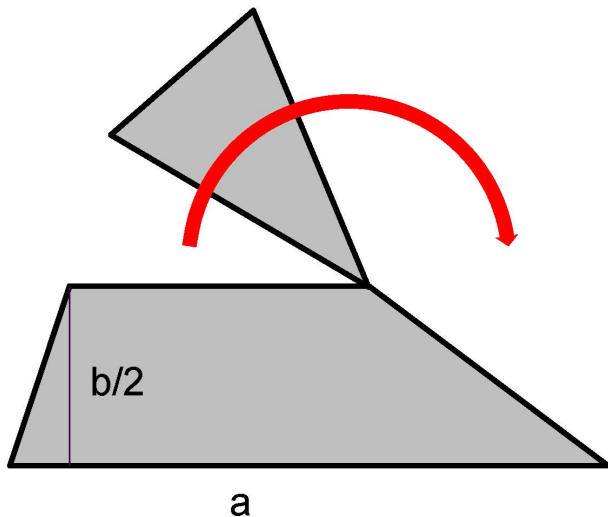


$$T = \frac{ab}{2}$$

Minden *háromszög* átdarabolható *téglalappá*

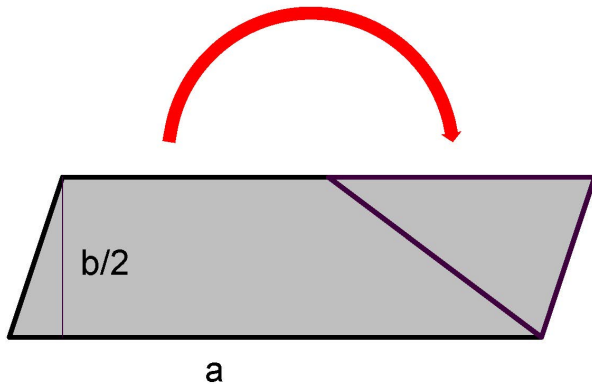


Minden *háromszög* átdarabolható *téglalappá*



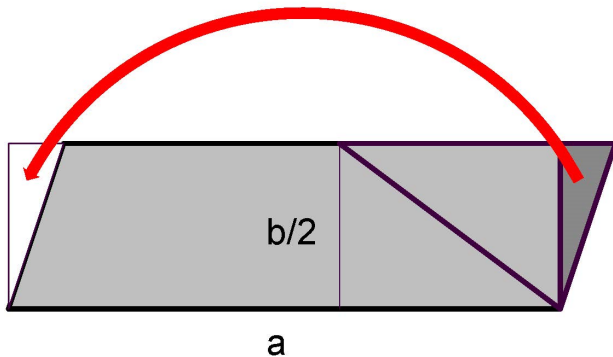
Minden *háromszög* átdarabolható *téglalappá*

$$T = \frac{ab}{2}$$

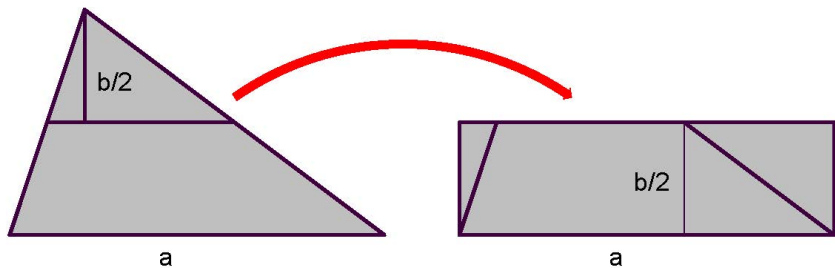


Minden *háromszög* átdarabolható *téglalappá*

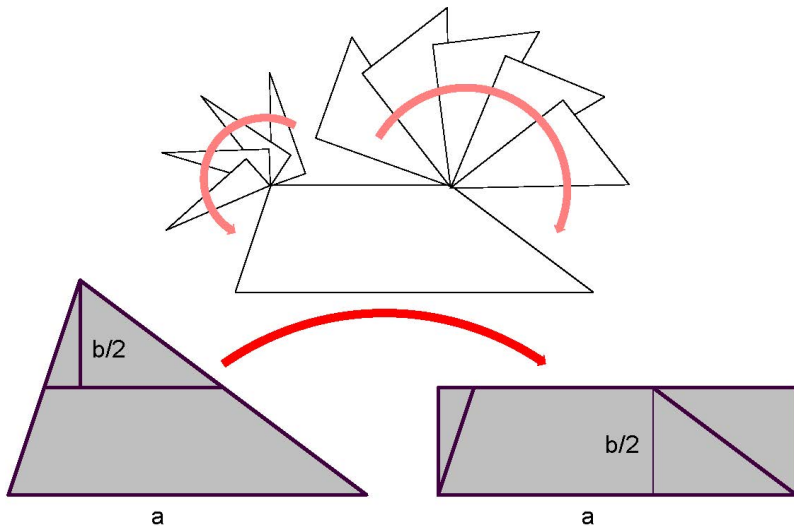
$$T = \frac{ab}{2}$$



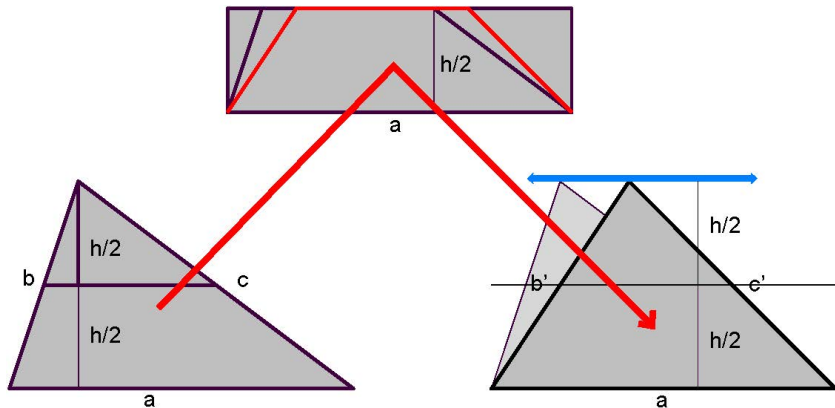
Minden *háromszög* átdarabolható *téglalappá*



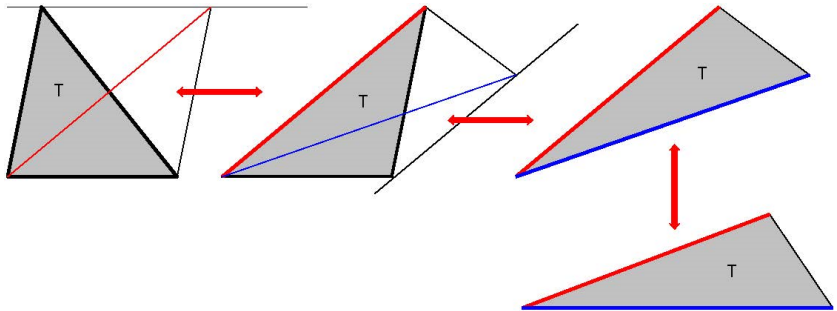
Minden *háromszög* átdarabolható *téglalappá*



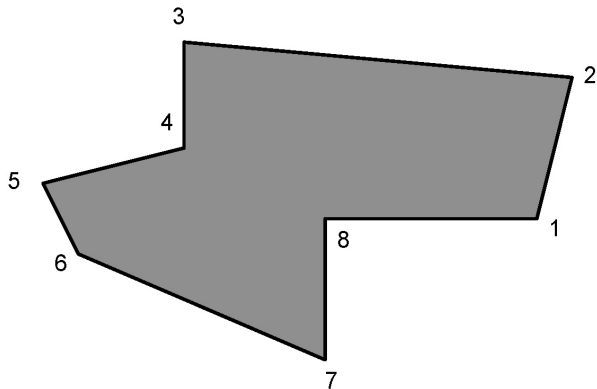
Egyenlő területű és közös oldalú háromszögek egymásba darabolhatók



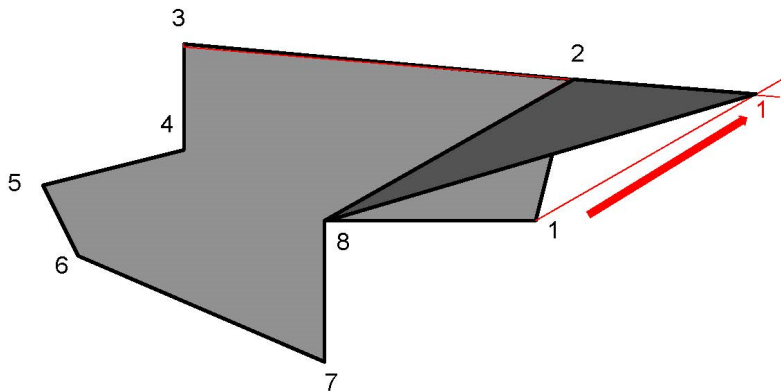
*Egyenlő területű háromszögek
egymásba* darabolhatók



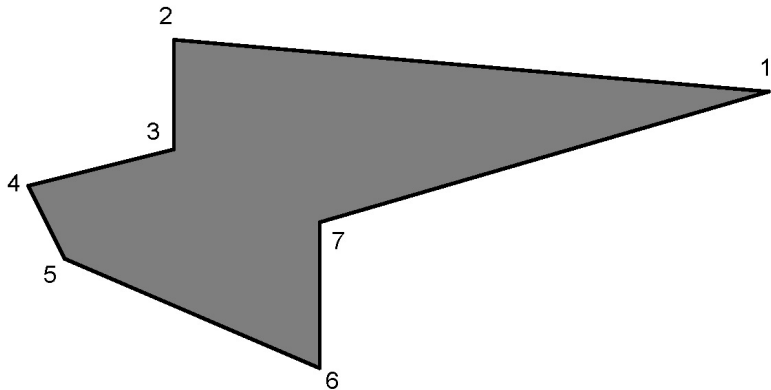
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



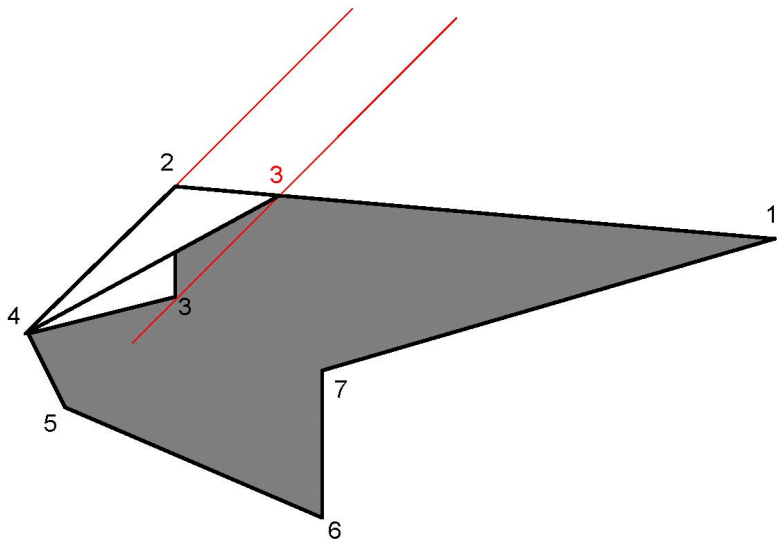
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



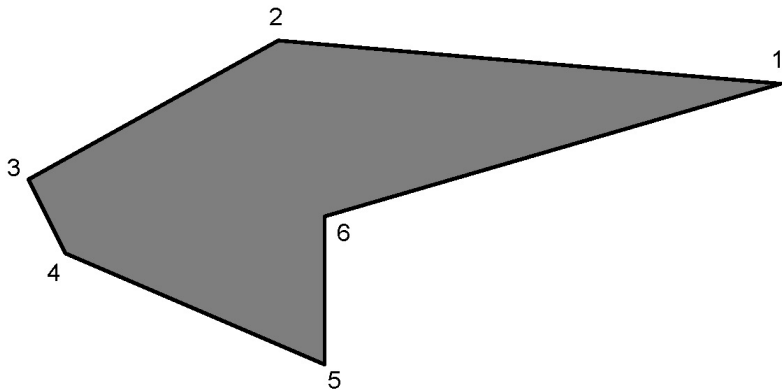
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



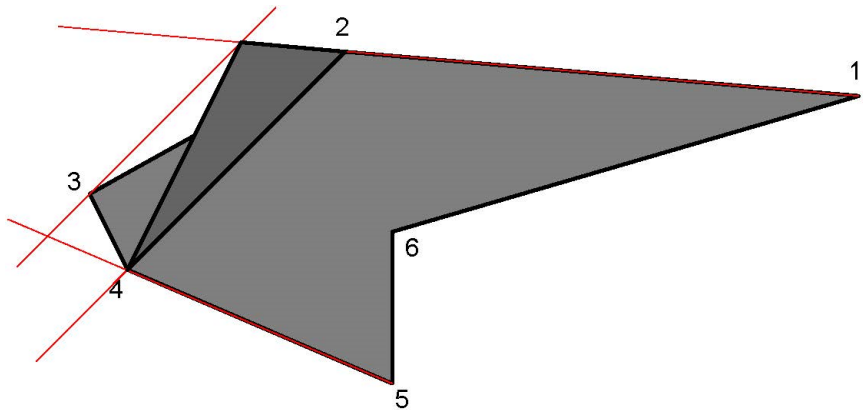
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



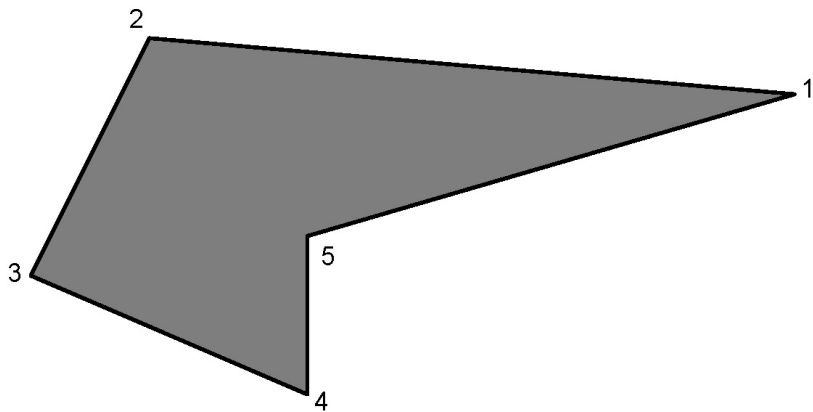
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



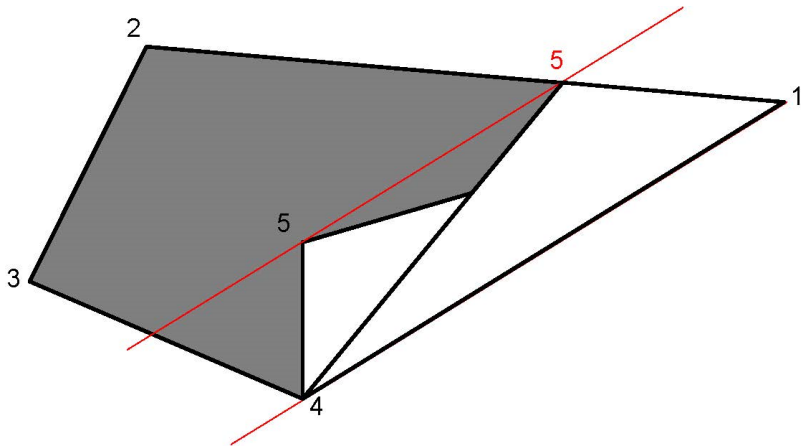
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



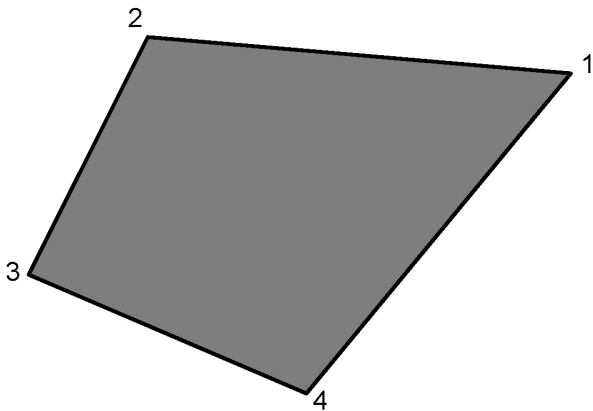
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



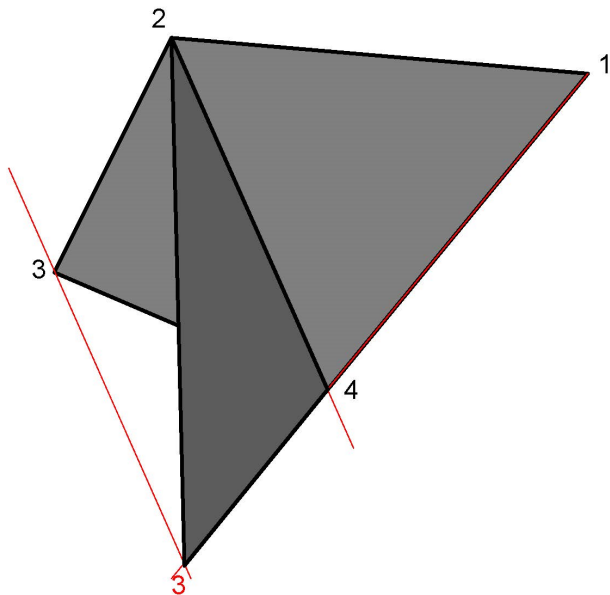
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



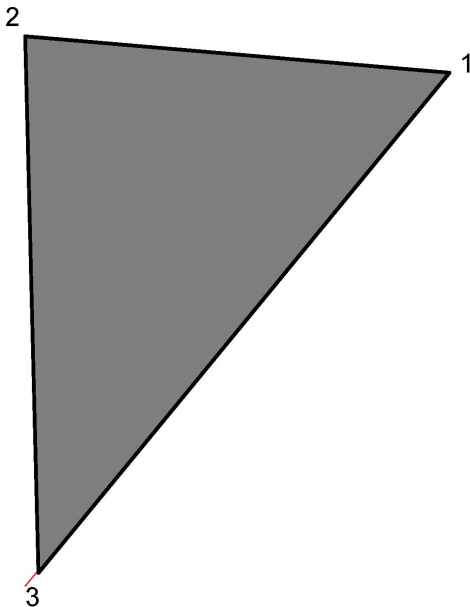
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



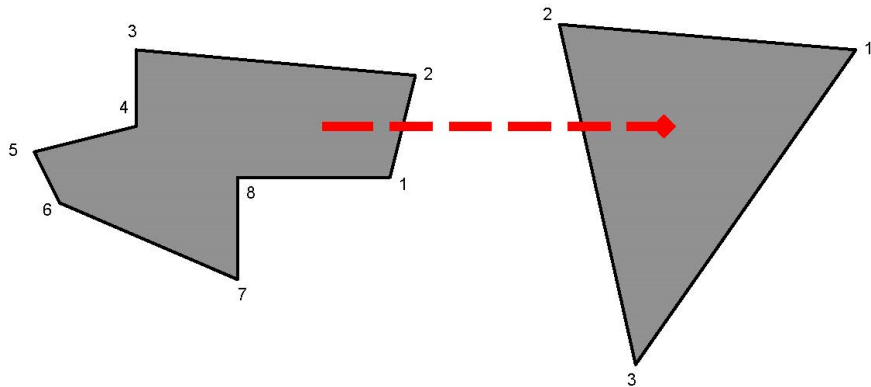
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



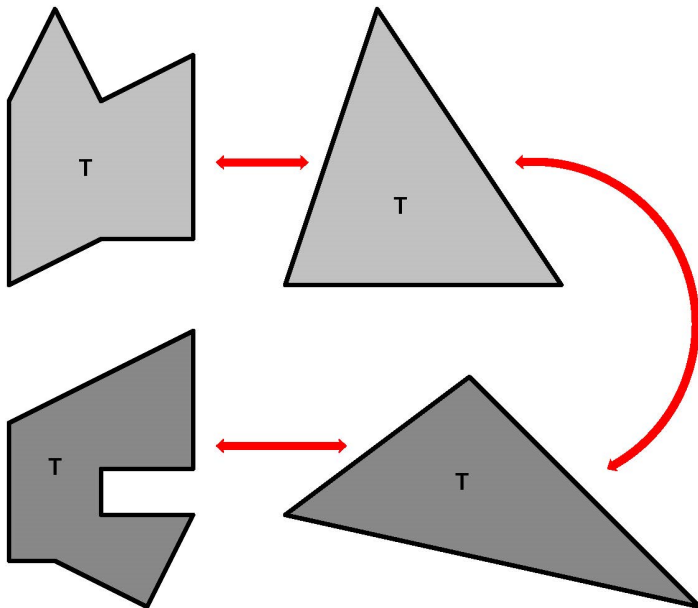
Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



Minden *sokszög* azonos területű *háromszöggé* darabolható



Egyenlő területű sokszögek egymásba darabolhatók



Q.E.D.

Négyzetgyökvonás... ollóval!

Bevezetés a témakörbe

Terület-mérés és területtartó átdarabolás

Bolyai Farkas sokszög-átdarabolási tétele

Az eredeti bizonyítás

Egy másik bizonyítás

Négyzetgyökvonás... ollóval!

esetleg... fűrészeléssel!

Hilbert és átdarabolás 3D-ben

Bonus

Ezt mondta a DeepSeek AI

Átdarabolás az óvodában

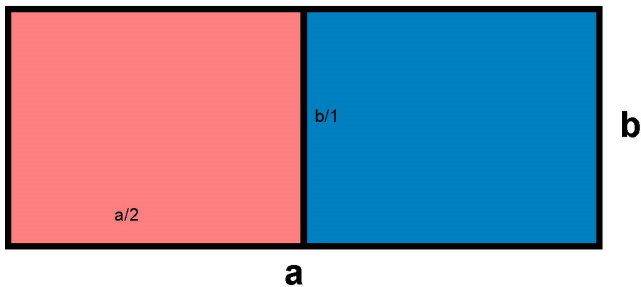
Minden *téglalap* átdarabolható...

$$T=ab$$



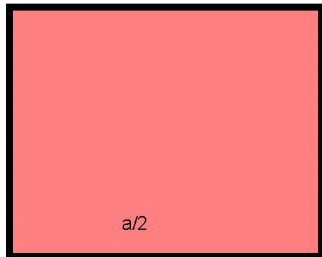
... így,

$$T=ab$$



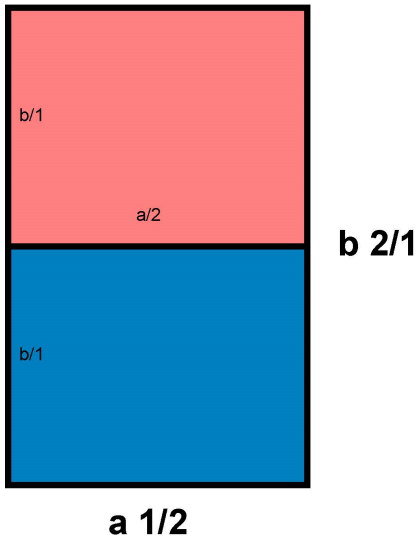
... így,

$$T=ab$$

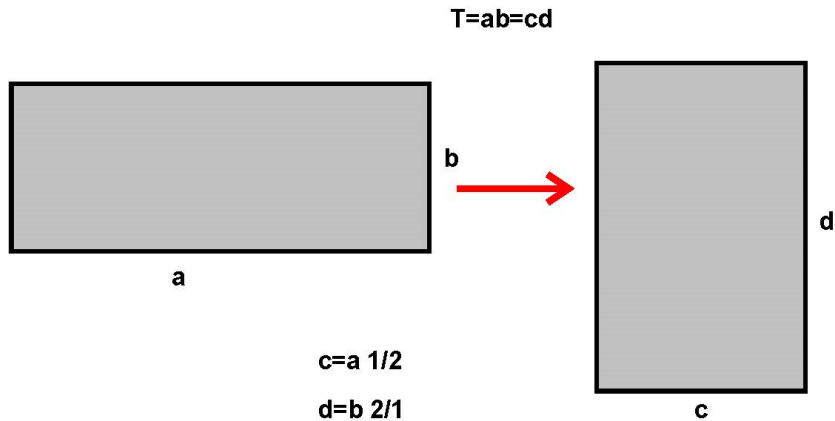


... így,

$$T=ab$$

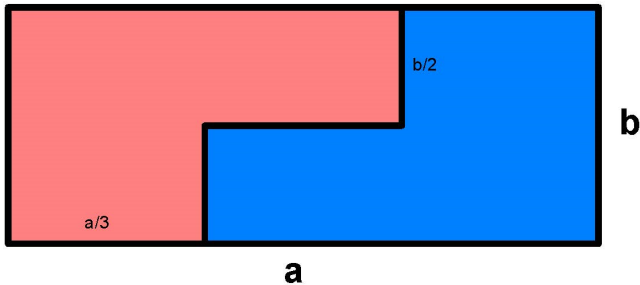


... így,



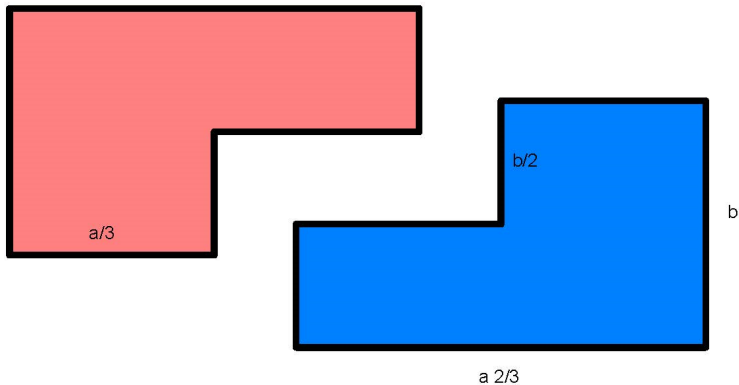
... aztán így,

$$T=ab$$



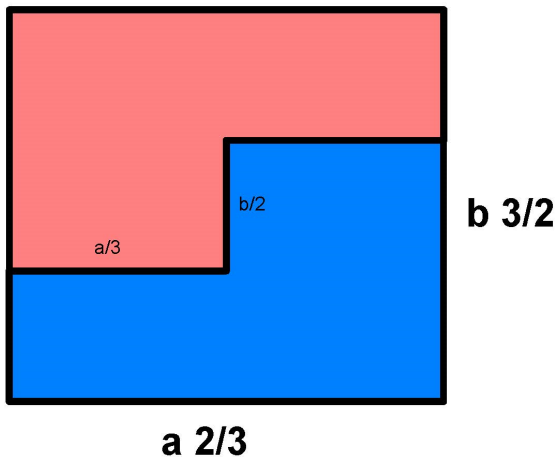
... aztán így,

$$T=ab$$



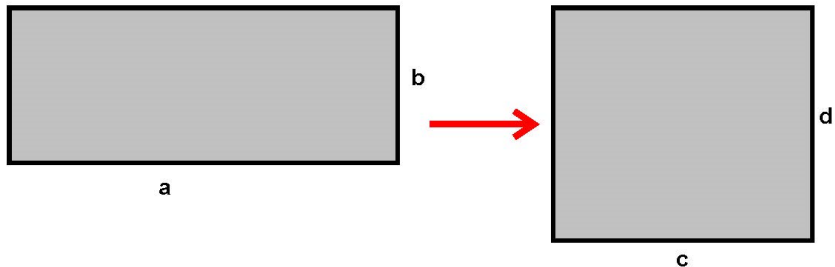
... aztán így,

$$T=ab$$



... aztán így,

$$T=ab=cd$$

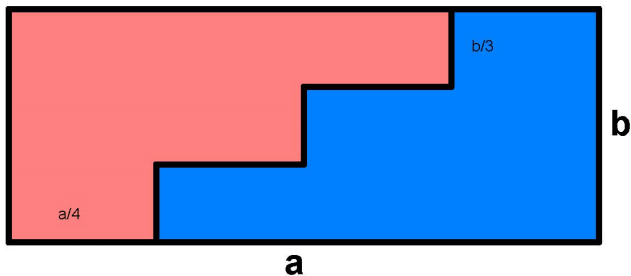


$$c=a \frac{2}{3}$$

$$d=b \frac{3}{2}$$

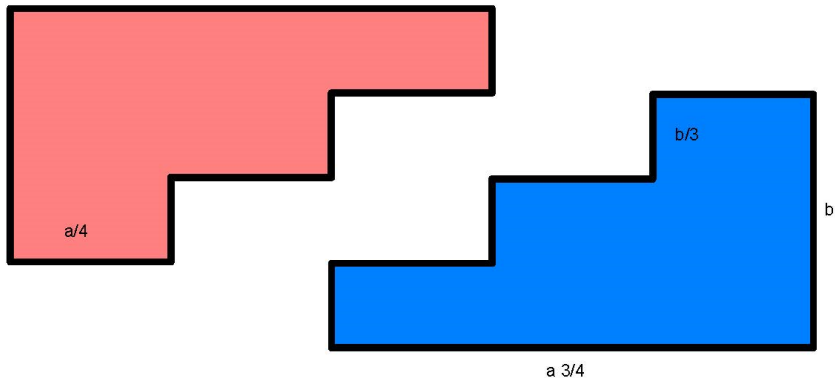
... vagy így,

$$T=ab$$



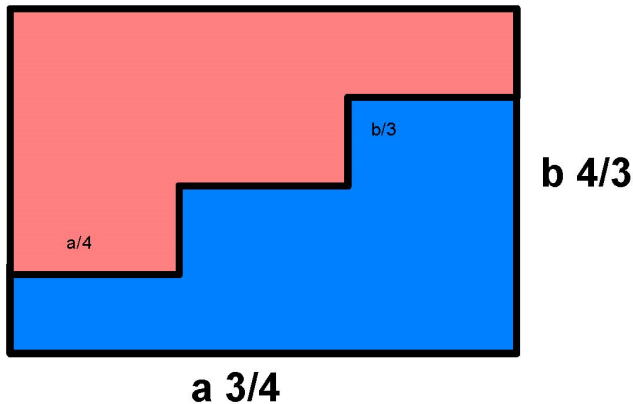
... vagy így,

$$T=ab$$



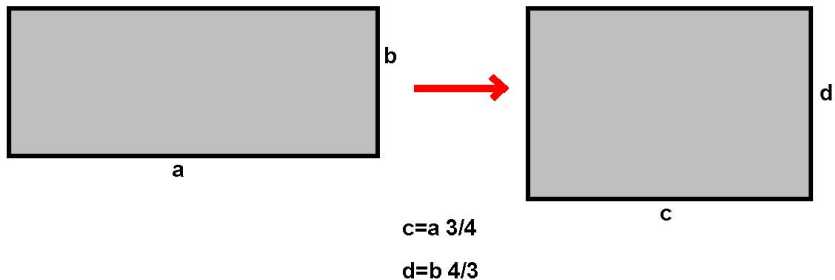
... vagy így,

$$T=ab$$



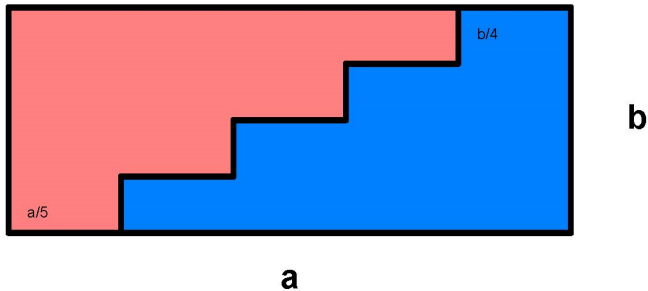
... vagy így,

$$T=ab=cd$$



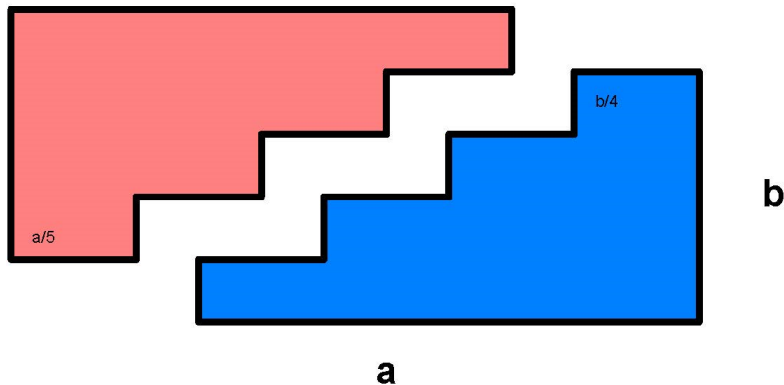
... esetleg így,

$$T=ab$$



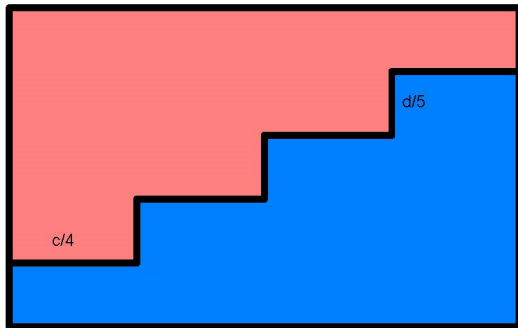
... esetleg így,

$$T=ab$$



... esetleg így,

$$T=ab=cd$$

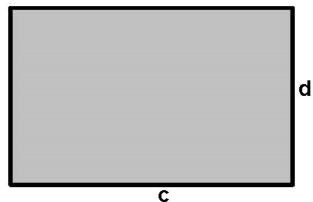
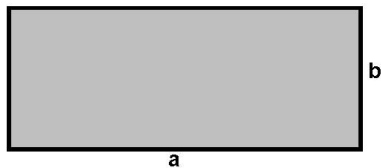


$$c=a \frac{4}{5}$$

$$d=b \frac{5}{4}$$

... esetleg így,

$$T=ab=cd$$

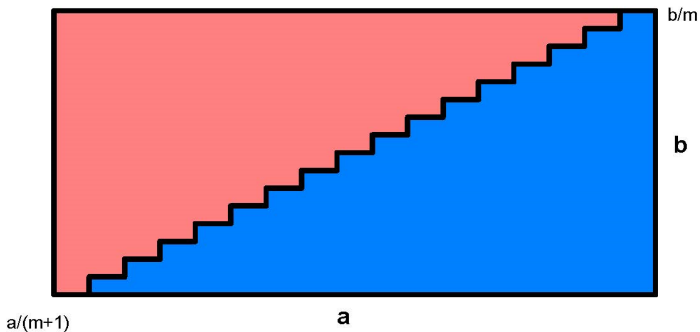


$$c=a \frac{4}{5}$$

$$d=b \frac{5}{4}$$

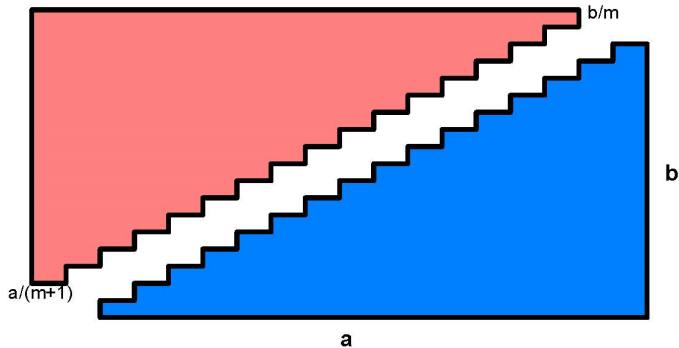
... vagy általában így. Nevezzük ezt *m-fűrészelésnek*.

$$T=ab$$



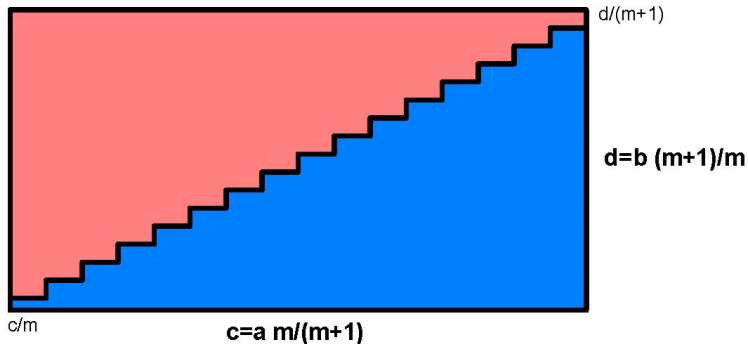
... vagy általában így. Nevezzük ezt *m-fűrészelésnek*.

$$T=ab$$



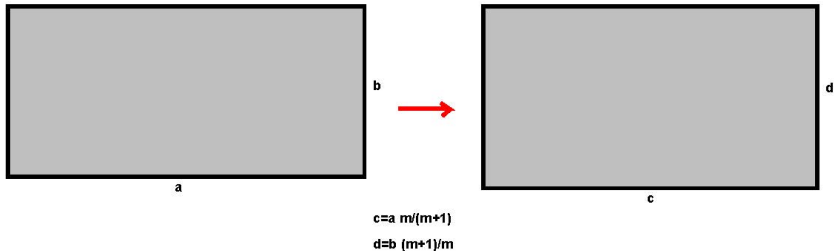
... vagy általában így. Nevezzük ezt *m-fűrészelésnek*.

$$T=ab=cd$$



... vagy általában így. Nevezzük ezt *m-fűrészelés*nek.

$$T=ab=cd$$



A négyzetgyökvonás = *m-fűrészelések* sorozata

Tétel 2 (Négyzetgyökvonás, mint *m-fűrészelések* sorozata)

Legyen a és b két pozitív szám, $a \geq b > 0$. Legyen továbbá $c = \sqrt{a \cdot b}$.

Az (a, b) oldalú téglalap (c, c) oldalú négyzetté való *átfűrészelésének* algoritmusát alább átható, és

$$a_n, b_n \longrightarrow c = \sqrt{ab},$$

véges vagy végtelen számú lépésben.

Bizonyítás: ... az érdeklődő olvasóra bízva.

A *fűrészeléses* négyzetgyökvonás algoritmus

Algorithm 1 Négyzetgyökvonás *fűrészeléssel*

Require: $a \geq b > 0$, N , ($a_1=a$, $b_1=b$)

▷ *Input* $a \geq b > 0$

1: **for** $n = 1, \dots, N$ **do**

2: **if** $a=b$ **then**

▷ *Megvan a pontos* $c = \sqrt{ab}$.

3: Print n , $c = a$, Stop

▷ *Lépés-szám* n .

4: **else**

5: ▷ *A legkisebb fűrészfog-szám, ú.h. a téglalap még lapos, m . ◁*

6: $m = f(n) = \min\{k \mid k \geq 1, (\frac{k}{k+1})^2 \geq \frac{b}{a}\}$, ($m = f(n)$)

7: $a \leftarrow \frac{m}{m+1}a$, ($a_{n+1} = \frac{m}{m+1}a_n$)

▷ *Az új hosszúság* a .

8: $b \leftarrow \frac{m+1}{m}b$, ($b_{n+1} = \frac{m+1}{m}b_n$)

▷ *Az új szélesség* b .

9: Print N , $c \approx a$, $a - b$, Stop ▷ *N lépés, $c \approx \sqrt{ab}$ közelítés, és hiba.*

Egy példa *fűrészeléses* négyzetgyökvonásra

Alkalmazás: Számítsuk ki egyre jobb közelítéssel $\sqrt{5}$ értékét.

Megoldás: Legyen $a = 5$ és $b = 1$. Az előbbi algoritmus a $\sqrt{5}$ értékét számítja ki. Az algoritmus minden iterációja megduplázza a pontos tízedes számjegyek számát!

A **10**-edik iteráció már **642** pontos számjegyet ad!

```
2.23606797749978969640917366873127623544061835961152572427089724541052
0925637804899414414408378782274969508176150773783504253267724447073863
5863601215334527088667781731918791658112766453226398565805357613504175
3378500342339241406444208643253909725259262722887629951740244068161177
5908909498492371390729728898482088641542689894099131693577019748678884
4250897541329561831769214999774248015304341150359576683325124988151781
3940800056242085524354223555610630634282023409333198293395974635227120
1341749614202635904737885504389687061135660045757139956595566956917564
5782219525000605392312340050092867648755297220567662536660744858535052
62330678494633
```

Az *m-fűrészfogak* száma az *n*.-dik lépésben

n	m=f(n), a fűrészfogak száma, az n.-dik lépésben

1	1
2	9
3	161
4	51841
5	5374978561
6	57780789062419261441
7	6677239169351578707225356193679818792961
8	8917104584944592158173334192041105061158110263858982832507849181241790196 6295041
9	1590295083576797343684160742522198114312356064324948721729493943653386622 7418678586143870309863245838079169166028428928842081968173986026885683691 167976522383361
10	5058076905697065696858918086620930410994242907601750591445619064030100664 7374788464319885363784868658830043052233571432454853608915855352433758555 7668571761107239817373835360532019448305381242930834989627538359599708704 5324947141878277256595174852819826588508426622696790836997200613027793430 93333374005819558095699312641

Hilbert és átdarabolás 3D-ben

- David Hilbert az 1900-ban megtartott nemzetközi matematikai kongresszuson – meglepetésre – nem saját eredményeiből merítette előadásának témáját, hanem 23 nyitott kérdést mutatott be, amelyek szerinte, a legfontosabb kérdések a matematikai kutatás számára.

- David Hilbert az 1900-ban megtartott nemzetközi matematikai kongresszuson – meglepetésre – nem saját eredményeiből merítette előadásának témáját, hanem 23 nyitott kérdést mutatott be, amelyek szerint, a legfontosabb kérdések a matematikai kutatás számára.
- A harmadik nyitott kérdés: Megadható-e két egyenlő alapterületű és magasságú tetraéder, amelyek nem darabolhatók át egymásba?

Hilbert 3. problémája

- David Hilbert az 1900-ban megtartott nemzetközi matematikai kongresszuson – meglepetésre – nem saját eredményeiből merítette előadásának témáját, hanem 23 nyitott kérdést mutatott be, amelyek szerint, a legfontosabb kérdések a matematikai kutatás számára.
- A harmadik nyitott kérdés: Megadható-e két egyenlő alapterületű és magasságú tetraéder, amelyek nem darabolhatók át egymásba?
- Max Dehn (Hilbert tanítványa), 1 évben belül megoldotta: *Vannak olyan egyenlő térfogatú poliéderek, amelyek nem darabolhatók át egymásba.*

Bonus

Bevezetés a témakörbe

Terület-mérés és területtartó átdarabolás

Bolyai Farkas sokszög-átdarabolási tétele

Az eredeti bizonyítás

Egy másik bizonyítás

Négyzetgyökvonás... ollóval!

esetleg... fűrészeléssel!

Hilbert és átdarabolás 3D-ben

Bonus

Ezt mondta a DeepSeek AI

Átdarabolás az óvodában

A DeepSeek nyilatkozata Bolyai Farkas átdarabolási tételéről

Thank you, this is wonderful! Well I would like to ask you a question related to the Hilbert's famous 3rd problem, from the list of its 23 open questions presented on a congress in 1900. This problem was solved quickly by M. Dehn, but it has a connection to a nice geometrical problem solved by Farkas Bolyai, a Hungarian mathematician lived 1775-1856. Do you have information about this problem?



Yes, I'd be happy to discuss Hilbert's third problem and its connection to Farkas Bolyai's work! Let's break this down step by step.

Hilbert's Third Problem

Hilbert's third problem is one of the 23 problems David Hilbert presented in 1900 as part of his famous list of open questions in mathematics. The problem is about **polyhedral equivalence** and asks:

Given two polyhedra of equal volume, is it always possible to cut one into a finite number of polyhedral pieces and reassemble them to form the other?

In other words, are two polyhedra with the same volume **scissors-congruent**? Hilbert suspected that the answer was no, and this was confirmed by Max Dehn in 1901.

Dehn's Solution

Max Dehn introduced the concept of the **Dehn invariant**, a quantity that remains unchanged under scissors-congruence. He showed that two polyhedra are scissors-congruent if and only if they have the same volume **and** the same Dehn invariant.

The Dehn invariant is defined as:

$$D(P) = \sum_e \text{length}(e) \otimes \theta(e),$$

where:

- e ranges over the edges of the polyhedron P ,
- $\text{length}(e)$ is the length of edge e ,
- $\theta(e)$ is the dihedral angle at edge e ,
- $\otimes$ denotes the tensor product over $\mathbb{Q}$.

Dehn proved that a cube and a regular tetrahedron of the same volume have different Dehn invariants, meaning they are **not** scissors-congruent. This resolved Hilbert's third problem in the negative.

Connection to Farkas Bolyai

Farkas Bolyai (1775–1856), a Hungarian mathematician and father of János Bolyai (one of the founders of non-Euclidean geometry), worked on a related geometric problem. He studied the **equidecomposability** of polygons, specifically whether two polygons of equal area can be cut into a finite number of congruent pieces and rearranged to form each other.

Bolyai proved the following result, now known as the **Bolyai-Gerwien Theorem**:

Two polygons of equal area are scissors-congruent in the plane.

This means that any two polygons of equal area can be cut into a finite number of polygonal pieces and rearranged to form each other. This result is in stark contrast to the three-dimensional case, as shown by Dehn's solution to Hilbert's third problem.

Key Differences Between 2D and 3D

- In **2D**, the Bolyai-Gerwien Theorem shows that area is the only invariant for scissors-congruence of polygons.
- In **3D**, Dehn's work shows that volume alone is insufficient; the Dehn invariant is also required to determine scissors-congruence of polyhedra.

This highlights the deeper complexity of geometry in three dimensions compared to two dimensions.

Summary

- Hilbert's third problem asked whether two polyhedra of equal volume are scissors-congruent.
- Dehn resolved this negatively by introducing the Dehn invariant.
- Farkas Bolyai's work on the equidecomposability of polygons in 2D (the Bolyai-Gerwien Theorem) contrasts with Dehn's result in 3D.

Let me know if you'd like further clarification or details! 😊



Bevezetés a témakörbe

Terület-mérés és területtartó átdarabolás

Bolyai Farkas sokszög-átdarabolási tétele

Az eredeti bizonyítás

Egy másik bizonyítás

Négyzetgyökvonás... ollóval!

esetleg... fűrészeléssel!

Hilbert és átdarabolás 3D-ben

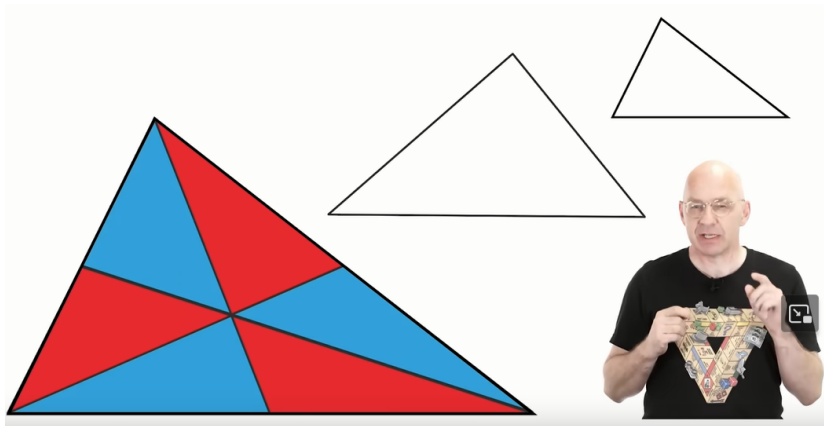
Bonus

Ezt mondta a DeepSeek AI

Átdarabolás az óvodában

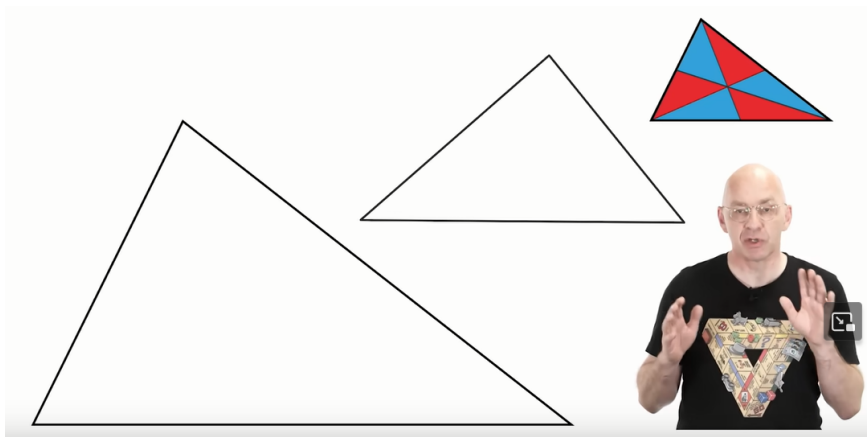
Simple yet 5000 years missed?

(Egy régi *átdarabolással* kapcsolatos tulajdonság...)



Simple yet 5000 years missed?

(Egy régi *átdarabolással* kapcsolatos tulajdonság... már 10 éve ismert)





Bolyai Farkas

Tentamen (1832)

Magyar Elektronikus Könyvtár

<https://mek.oszk.hu/06500/06507/>



Szabó Péter Gábor

William Wallace és a Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel

Matlap, XXVI. évf. 9. sz., 2022. 314–316. o

Köszönöm a figyelmet!