

A hiperbolikus szemléletmód jelei gondolkodásunkban

Signs of a hyperbolic approach in our thinking

MUNKÁCSY Katalin PhD

ELTE, Matematikai Intézet
katalin.munkacsy@gmail.com

Abstract

In my thesis, I would like to show that the hyperbolic view has a place in our thinking outside of mathematics. There are two axiomatically equivalently founded geometric systems for describing the same physical reality. The theory developed by János Bolyai, and at the same time by Lobachevsky and Gauss, allows us to believe our eyes, even if the sight contradicts the geometric statements we learned in childhood.

Keywords: János Bolyai, hyperbolic geometry, analysis of vision

Kivonat

Dolgozatomban azt szeretném megmutatni, hogy a hiperbolikus szemlélet a matematikán kívül is helyet kap gondolkodásunkban. Többféle, axiomatikusan egyenértékűen megalapozott, geometriai rendszer létezik, ugyanannak a fizikai valóságnak a leírására. A Bolyai János, és vele egy időben Lobacsevszkij és Gauss által kidolgozott elmélet lehetővé teszi számunkra, hogy higgyünk a szemünknek, akkor is, ha a látvány ellentmond a gyerekkorunkban megtanult geometriai állításoknak.

Kulcsszavak: Bolyai János, hiperbolikus geometria, a látvány elemzése

1. BEVEZETÉS

Az általam vizsgált probléma: Hogyan válhat a mindennapi gondolkodás részévé a hiperbolikus geometria? Hihetünk-e a szemünknek, ha az ellentmond a korábban tanultaknak? Matematika tanárszakos hallgatóknak tanítottam matematikatörténetet az ELTE-n. Amikor Bolyai Jánoshoz értünk, mindig felpezsdült a hangulat. Az órákon a matematikai probléma, a parallelák kérdésének megoldása volt a központban, de kitértünk a matematikai előzményekre, Bolyai-Lobacsevszkij-Gauss kutatásainak egyidejűségére, Bolyai elsőbbségére (7), és alkalmanként arra is, hogy a geometriák létezése hogyan befolyásolta a matematikai axiómarendszer tulajdonságaira vonatkozó tudományos nézeteket. A tananyag keretein kívül esik az, hogy a világ geometriai leírásának naiv nézetei hogyan kaptak új értelmet a hiperbolikus geometria tükrében. Ebben a munkában ezt a változást szeretném néhány példán keresztül bemutatni.

2. ELŐZMÉNYEK

2.1. Az ősi világkép és a térképek

Sok nép mítoszaiban előfordul az életfa (8). A fa koronája jelképezi a felső világot, gyökerei az alvilágot, életünk pedig a fa törzse körüli korongon zajlik. Ugyanezt a szemléletet tükrözik a népmeséknek az a fordulata, amikor a hős bánatában elszalad a világ végére és ott ülve a semmibe lógatja lábát. Ezeket a nézeteket a térképek kézzel foghatóan, szemmel láthatóan tükrözik. Smith (10) matematikatörténet könyvében szereplő három antik görög térkép a mitikustól a gyakorlati célokat szolgáló, a földgömb akkor ismert egészét bemutató utat ábrázolja.

2.2. Arisztotelész nézetei Tóth Imre tolmácsolásában

Tóth Imre (11) filológiai kutatásai szerint a görög filozófiában többféle geometria lehetősége felmerült. Arisztotelésznel olyan megjegyzéseket fedezett föl, amelyek szerint a párhuzamosság problémáját is felvetette. Az antik görög kultúra hanyatló korszakában, amikor megszűnt a tudományokkal foglalkozó bölcsek közötti élő párbeszéd, megkezdődött a párhuzamosokra vonatkozó állítás bizonyítási kísérlete, szemben Euklidesszel, aki az egyetlen párhuzamos létezését axiómaként mondta ki.

2.3. Gauss Göttingenben

A hiperbolikus geometria körüli értetlenséget erősítette Gauss állásfoglalása, amely szerint azt a gondolatot, hogy a háromszög szögeinek összege nem feltétlenül 180 fok, nem szabad nyilvánosságra hozni, mert megzavarja az embereket. Mi történne a társadalomban, ha az akkor, a XIX. században is zavaros években, kiderülne, hogy a matematikában sem lehet bízni? Az történeletről egy új összefoglalás is olvasható (6). Az eredmények természetesen szép lassan kiszivárogtak, és a bizonytalanság akár a zurnalisztikában is megjelenik: Találkozunk vagy sem az egyenesek végtelenben?¹ Mit mond erről a tudomány? Tessék erre a kérdésre rövid, könnyen érthető választ adni. Lehet röviden válaszolni, de az természetesen nem lesz könnyen érthető: Attól függ, hogy melyik geometriában tesszük föl a kérdést.

3. KÖVETKEZMÉNYEK

3.1. Túl a filozófián

Mára nem csak filozófiai kérdés, hogy melyik geometria írja le pontosan a világunkat. A gyakorlatban kiderült, hogy a körülményektől függ, hogy melyik megközelítést érdemes alkalmazni. Kis méretek esetén az euklideszi, a hiperbolikus és az elliptikus, azaz a gömbi geometria egyaránt alkalmas a sík vagy a tér leírására. Csak éppen a számítások elvégzésben van óriási különbség az euklideszi geometria javára. Csillagászati méretekben a hiperbolikus geometria a jobb választás. Felmerülhet a kérdés: Láthatjuk-e a végtelent? A látótávolságnak nincs határa, hiszen akár szabad szemmel láthatjuk a fényét az eddig ismert legtávolabbi csillagnak is. A Triangulum galaxis tőlünk 3 millió fényévre van.¹

3.2. Látásunk

A legújabb anatómiai és látáskutatások arra utalnak, hogy a szemünk képalkotására a hiperbolikus geometria a jellemző. Ez egyrészt a szem finomszerkezetének jellemzőiből tudható, másrészt mi magunk is tapasztalhatjuk, ha összehasonlítjuk a fényképen és az agyunkban megjelenő képet. Néhány fotós szerint a közöttük lévő különbség nyilvánvaló, mások számára irreleváns a probléma. Az angol nyelvű szakirodalomban (1, 5) említik a látás geometriájának hiperbolikus jellegét, magyarul eddig nem olvastam róla. A jelenség (a látásban jelenlévő hiperbolikus geometria) egyszerűen is megfigyelhető. Képzeljük el, hogy egy zöld háttér előtt lévő kis piros virágot nézünk. Ha fényképet készítünk egy egyszerű géppel, akkor vagy a nagy egészet látjuk, vagy ránagyítunk a virágra, és akkor azt. Szabad szemmel viszont egyszerre észleljük a háttérrel is, és a számunkra fontos részletet is.

3.3. Escher ábrák

A hiperbolikus geometria csodálatba ejtette a grafikust, aki elkészítette a Circle limit² sorozatot, ami a hiperbolikus geometria Poincare korongmodelljének művészi ábrázolása.

¹ <https://www.warbyparker.com/learn/how-far-can-the-human-eye-see>

² https://en.wikipedia.org/wiki/Circle_Limit_III

3.4. Adatvizualizálás

Befejezésül a hiperbolikus geometria egyik modern, hétköznapiak tűnő alkalmazását említem meg (2, 3, 4, 9). Mindannyiunk számára ismerős, amikor keresünk valamit az interneten és megjelenik több millió találat. Több vizsgálatban is megállapították, hogy az emberek többsége az első három találatot nézi meg, jóval kevesebben akár tízet is, de komolyabban szinte senki sem kezdi el áttekinteni a javasolt olvasnivalókat. Ezen segít, ha az információk nem lineárisan, hanem a hiperbolikus síkon, pontosabban annak modelljén jelennek meg. A klasszikus példa a jaguár volt. A vizsgálat esetében az első 10 találat mindegyike az autómárkára vonatkozott. Az állat csak későbbi helyen szerepelt először. Ez a tájékozatlan olvasót, más, természetesebben előforduló esetekben félrevezetheti. A javasolt megoldás: egy körlapon megjelennek külön csoportokban a fogalom értelmezései és az olvasó a számára érdekes úton haladhat tovább, úgy, hogy közben az egyéb információk is a szeme előtt maradnak, de a háttérben, a körlap széle felé, egyre kisebbedő méretben. A körlap centrumában az olvasó számára fontos információk találhatók. Az, hogy mi kerül az adott pillanatban a centrumba, az olvasó döntésén múlik. Az információk közötti kapcsolat, az információk hierarchiája a gondolati térképekből ismerős lehet számunkra, bár ott a méret vagy nem játszik szerepet, vagy nem az információk helyzetétől, hanem azok megjelenő tartalmától függ.

4. KÖVETKEZTETÉSEK

A Bolyai János által kidolgozott matematikai elmélet, az abszolút geometriára épülő hiperbolikus geometria megváltoztathatja véleményünket a tudományos nézetek és a tapasztalat ellentmondásosságáról is. A két szélsőséges nézetet:

1. a tudomány értelmetlen, semmi köze a valósághoz és
2. aki annak hisz, amit lát, és nem azt fogadja el, amit tud, alkalmatlan az absztrakcióra, a tudományos gondolkodásra

érdemes komolyan venni és megcáfolni. A tudományos gondolkodás, miközben egyre messzebbre, egyre magasabbra, vagy inkább mélyebbre ér el, mindennapi tapasztalatainkról is egyre többet tud mondani.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

1. Bilteanu L. és munkatársai: Human Eye Optics within a Non-Euclidian Geometrical Approach and Some Implications in Vision Prosthetics Design, 2024.
https://www.researchgate.net/publication/349047364_Human_Eye_Optics_within_a_Non-Euclidian_Geometrical_Approach_and_Some_Implications_in_Vision_Prosthetics_Design
2. Chen Ch.: Information visualization 2010. https://www.researchgate.net/publication/227643280_Information_visualization
3. González J. M. : The Hyperbolic Vision in Humans and Other Animals, 2021.
<https://www.ijsr.net/archive/v10i10/SR211023003323.pdf>
4. Hesberger Z. és munkatársai: Hyperbolic Trees in Complex Networks , 2018.
https://real.mtak.hu/119179/1/Hyperbolic_Trees_in_Complex_Networks.pdf
<https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2017-09/554-olah-gal-robert-gauss-es-bolyai>
5. Indow T.: Hyperbolic Representation of Global Structure of Visual Space, Journal of Mathematical Psychology, Volume 41, Issue 1, March 1997, Pages 89-98
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022249697911512>
6. Molnár Z. G. Könyvismertetés: Torkel Franzén: Gödel nemteljességi tételei Értelmezések és félreértések, TypoTeX, 2013.
<https://ematlap.hu/index.php/konyvespolc-2017-06/517-godel-nemteljessegi-tetelei-ertelmezések-es-felreerte-sek>
7. Oláh Gál R.: Gauss és Bolyai János — újraértékelve, 2017.
<https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2017-09/554-olah-gal-robert-gauss-es-bolyai>
8. S.Nagy Katalin: Életfa, világfa, Tree of Life, World Tree, 2021.
https://epa.oszk.hu/02300/02316/00022/pdf/EPA02316_kaleidoscope_2021_22_389-403.pdf
9. Shirky, C.: Information Visualization: Graphical Tools for Thinking about Data, Edventure, 2002.
<http://www.edventure.com, in Hungarian: http://www.pointinternet.pds.hu/ujsagok/evilag/2003/01/evilag-06.html>

10. Smith E.: History of Mathematics, Vol. I (Dover Books on Mathematics), 1923.
A könyv olvasható: https://www.hlevkin.com/hlevkin/90MathPhysBioBooks/mathHistory/Smith_History-Of-Mathematics-Vol1_1923.pdf
11. Tóth Imre: A szubjektum és szabadsága · A matematika alapjairól, 2008.
https://www.ponticulus.hu/rovatok/hidverok/inmem_tothimre.html#gsc.tab=0

ⁱ Kérdező az interneten (Gyakori kérdések): Valaki mondja már meg. Találkoznak vagy nem az egyenesek a végtelenben?

Az egyik válasz: A kérdés értelmes, de nem lehet rá egyértelmű választ adni.

1. Kimérni nem lehet, mert a háromszögek szögei, vagy a párhuzamosok távolsága (közeledése), olyan kicsit térnek el az euklideszi, az iskolában megismert geometria adataitól, hogy annak észlelésére a földi méretek nem elegendők.

2. Elméletileg mind a két geometria tökéletes, hibátlan rendszert alkot.

3. Praktikusan, földi méretekben az euklideszi geometriát alkalmazzuk. És közben gondolhatunk kétféleképpen:

a) az euklideszi geometria az igaz, és mi pontosan mérünk és számolunk.

b) a hiperbolikus (Bolyai) geometria az igaz, és miközben ugyanazt mérjük és számoljuk mint az előbbi esetben, de ezeket az adatokat most jó közelítésnek képzeljük.

4. Rajtunk áll, hogy olyan messze, amit semmiképpen nem lehet ellenőrizni, vagy éppen a végtelenben, hogyan képzeljük el, találkoznak-e vagy nem az egyenesek. Mind a kettő elképzelés elméletileg jól megalapozott.