Az entrópia története – Clausiustól a mesterséges intelligenciáig [1]

The history of entropy – from Clausius to AI

BIRÓ Tamás Sándor,
PhD, Dsc, Wigner kutatóprofesszor

Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.,
Tel.: +36-1-392-2222 2705, biro.tamas@wigner.hu, https://wigner.hu/ ;
Universitatea Babeş-Bolyai, 40084 Cluj, Kogalniceanu 1.,Tel: +40 264 405 300

Abstract

The histrical evolution of the notion of entropy is sketched from Clausius to the artificial intelligence. From the thermodynamical bennings related to steam engine work and heat, through the atomic kinetic models, this evolution is highlighted, finishing with contemporary extensions like black hole entropy, non-convcentional entropies by Renyi and Tsallis, and finally entropy-like quantity, teh gintropy, used in analyses of wealth and income inequalities.

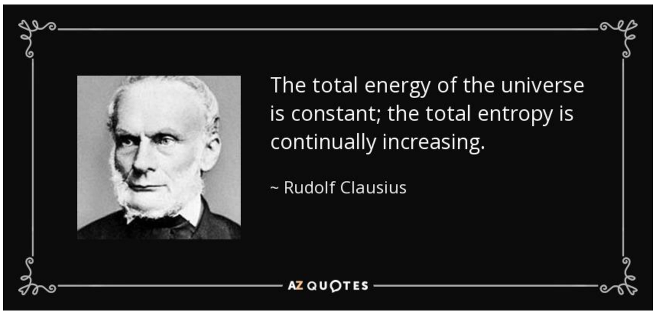
Keywords: entropy, heat, evolution of life, information, black holes, inequality indices

Kivonat

Az entrópia kifejezés történeti fejlődését vázoljuk fel Clausiustól a mesterséges intelligenciáig. A gőzgépek által végzett munkával és hővel kapcsolatos kezdetektől, át az atomszintű kinetikus modelleken, elemezzük ezt a fejlődést, befejezve olyan kortárs kiterjesztésekkel, mint a fekete lyukak entrópiája, a nem hagyományos Rényi és Tsallis entrópia, s végül a vagyoni és jövedelmi egyenlőtlenségek analíziseiben szereplő entrópia-szerű mennyiség, a dzsintrópia.

Kulcsszavak: entrópia, hő, az élet evolúciója, információ, fekete lyukak, egyenlőtlenség-indexek

1. Az ipari hőskor és a termodinamika



Rudolf Clausius:

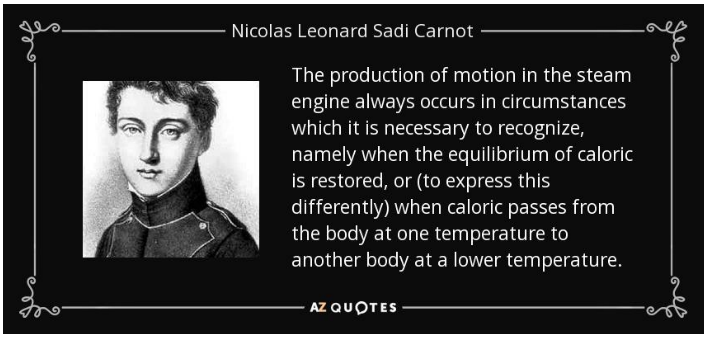
Az univerzum teljes energiája állandó;

a teljes entrópia folyamatosan nő [2].

Az entrópia szó görög eredetet sejtet. Azonban nem az ókorban keletkezett, hanem a tizenkilencedik század hatvanas éveinek elején: Rudolf Clausius, német professzor vezette be ezt a fogalmat a fizikába. Akkoriban divat volt görög hangzású szakkifejezéseket használni, a klasszika filológia átitatta Európa levegőjét.

Az en- képző a -ba, -be toldaléknak felel meg, de a hozzá-kötöttséget is mutatja. A hasonló fizikai szakkifejezés, az energia, a befektetett erőfeszítés (»erg«), munka hatására változó mennyiséget jelöl. Az entrópia szóban a „troposz” a hely, a cél. Az entrópia egy helyhez kötődő mennyiség – azonban ez a hely nem a geometriai koordináták által jelölt hely. Egy sokkal absztraktabb térben kötődik az értéke pontokhoz: a hőtani mennyiségek mint paraméterek terében [3,4].

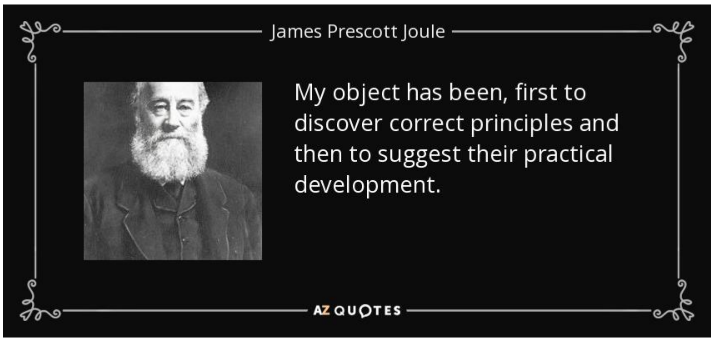
Miért ez a detour? Miért nem triviális a dolog, hiszen a mennyiségek általában pontról pontra változnak. Nos ez az, ami nincs így. A hőtan, termodinamika, is mozgásokat, pályákat ír le a hőtani paraméterek terében. A klasszikus térkép a térfogat (volumen, V) és a nyomás (presszió, p) értékeket követi egy gáz állapotának változásait leírva. A gázon vagy a gáz által végzett munka, a pdV tagok összege pedig a p(V) görbe alatti terület. Ha a gázon (vagy gőzön) körfolyamatot hajtunk végre, azaz több munkafázis után visszajutunk az eredeti (p,V) pontba, akkor a nettó munkavégzést a zárt pálya által körbefogott terület mutatja. Ez végtelenül sokféle úton tehető meg [5].



Nicolas Leonard Sadi Carnot:

mozgás előállítása a gőzgépben mindig olyan körülmények között történik, amit szükséges felismerni, nevezetesen amikor az egyensúlyi kalorikum helyreáll, vagy (másképpen szólva) amikor a kalorikum átmegy egy adott hőmérsékletű testről egy másik, alacsonyabb hőmérsékletű testre. [6]

Kiderült azonban, hogy a gépezet teljes energiájának a változása nem merül ki ebben a munkavégzésben. A közben fellépő hőközlés is számít az energia megváltozásában, a kettő összege az, amit az energia megmaradásához figyelembe kell venni: dE = -pdV + DQ. A hőközlés, DQ, szintén nem rendelhető egyetlen ponthoz, értéke attól függ, hogy milyen úton változtatjuk a rendszert két pont között. Ez tehát nem egy-egy ponthoz, paraméterponthoz kötött mennyiség. Ugyanakkor átszámítható a mechanikai munkavégzés egységeibe, kísérletileg megmérhető módon: Joule és Kelvin szellemes kísérletei bizonyították ezt (1 kcal = 427 mkp).



James Prescott Joule:

Az volt a célom, hogy előbb a

helyes elvet fedezzem fel

és azután javasoljak praktikus fejlesztést. [7]

Rudolf Clausius olyan fogalmat keresett, ami paraméterponthoz köthető, aminek a változása csak a kezdő és végpontbeli értékektől függ, de nem a közben megtett pályától. Ezért helyhez, troposzhoz kötöttnek, entrópiának nevezte el ezt a mennyiséget. S-sel jelölve az entrópiát, változását dS-nek jelöljük (a „d” a differencia szóra utal). Hasonlóan a mechanika munka pdV kifejezéséhez a hőt DQ=TdS formában írta fel, ahol T a Kelvin által bevezetett és a Boyle-Mariotte valamint Robert-Mayer által felírt ideális gáztörvényben szereplő ún. abszolút hőmérséklet. A hőt tehát a hőmérsékleten túl az entrópia változása adja, s ezzel az energia megmaradása legegyszerűbben a dE=TdS-pdV képlettel jellemezhető [3,4].

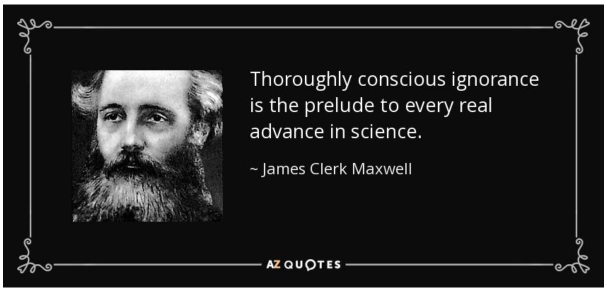
Ez az entrópia különleges mennyiség. Külső energiacsere nélkül, a teljes rendszerben az energia megmarad és az entrópia – nem csökkenhet. Értéke állandó, vagy növekszik. Ez az első olyan fontos és alapvető felismerés a fizikában, aminek matematikai leírása egyenlőtlenség formáját ölti: $dS \geq 0$. Ezt mondja ki a termodinamika második főtétele. Fontos megérteni, hogy ez csak energetikailag izolált („zárt”) rendszerekre igaz.

Az entrópia növekedésének elvével ekvivalens az, hogy a hő magától a melegebb testről a hidegebbre áramlik, ezt Joule, Kelvin és Maxwell, később Planck hangsúlyozták. Az interneten nemrég feltűntek olyan érvelések, amik szerint ennek a tételnek az élet létrejötte és felvirágzása, egyre összetettebbé válása a Földön ellentmond. Olyan formában is, hogy az egyre komplexebb élőlények megjelenése az entrópia csökkenését jelentené – tehát ez nem lehetne spontán evolúció terméke, csakis egy tudatos tervező által végrehajtott teremtésé. Ez az érvelés azonban félrevezető.

Földünk ugyanis nem egy energetikailag zárt rendszer. A naptól hőt vesz fel, a világűrnek hőt ad le. Ez a planéta egy közbülső termodinamikai test egy forróbb és egy hidegebb között. Valóban, a napsugárzás hőmérséklete kb. 6000 fokos, míg a világűr kb. 3 fokos az abszolút (Kelvin) hőmérsékleti skálán. A Föld által leadott infravörös sugárzás pedig nagyjából földi hőmérsékletű, azaz kb. 300 Kelvin fokos. Így lehet a Föld hőmérséklete ingadozva bár de állandó s mégis csökkenhet az entrópiája. Csak éppen három test figyelembe vételével kell számolni.

Vannak hőközlés mentes (adiabatikus) folyamatok és állandó entrópiájú (izentróp) folyamatok. Ha nincsenek kémiai reakciók, vagy az elektromágneses tér által, esetleg egyéb fizikai hatásra végzett munka, akkor ezek ekvivalensek, különben nem. Energetikailag magukra hagyott rendszerektől azt várjuk, hogy adiabatikusan táguljanak, a $dE + pdV = TdS = 0$ összefüggést kielégítve. Ha nyomás van a rendszerben és a térfogata szabadon nő, akkor a teljes belső energia csökken. Nagyjából így hűl az univerzum. Ha a nyomásról és tágulásról is elfeledkezhetünk, akkor mind az energia, mind az entrópia állandó, „megmarad". Clausius hőhalál (Wärmetod) elmélete szerint ez a világegyetem sorsa: egészen a maximális entrópiáig tart, s akkor egyensúlyban marad, nem lesz több változás, minden fizikai folyamat halottá dermed.

2. Atomelmélet, rend és káosz



James Clerk Maxwell:

A tudatlanság teljes tudatában lenni minden

valódi tudományos haladás előjátéka. [8]

Az entrópia fogalma tehát a hőközléses (főleg gőzgépet használó) ipari folyamatok megértése során alakult ki. Az azóta eltelt valamivel több mint másfél száz év alatt azonban kiderült, hogy ennél sokkal többre képes. Ez a fogalom meglepően hasznos és mélyen szántó egy sor más fizikai folyamat megértésében is.

Az első lépést a modern fizika felé az atomelmélet, s evvel kapcsolatban a hő kinetikus elmélete hozta el. A hőmérséklet és nyomás kapcsolatba került a gázokat alkotó atomok és molekulák mozgási, kinetikus energiájával: a teljes belső energia egyenletes eloszlása a lehetséges mozgási irányok, szabadsági fokok között egyensúlyban egyenletes, egységenként $kT/2$. Ebben az összefüggésben szerepel a „k" állandó, amit később Planck nevezett el „Boltzmann állandónak" [9].

Ebben az összefüggésben az entrópia növekedés tétele új arcokat kapott. Boltzmann megalkotott egy elméletet, amely a molekuláris káosz elvét alkalmazza: az egymással ütköző gázmolekulák nem emlékeznek előéletükre, pályájukra, hanem minden újabb ütközésnél mint két, egymástól független véletlen impulzusú részecske hatnak kölcsön. Ebben a modellben hosszú idejű zavartalan repülések és nagyon rövid, erőteljes ütközések váltják egymást. Az előbbiben nem változik a részecske impulzusa, az utóbbiban két, azonos tömegű részecske impulzust cserél. Ha a pár teljes kinetikus energiája sem változik, akkor rugalmas az ütközés.

Erre az elvre építve Boltzmann matematikai levezetést adott arra, hogy a részecskék (kinetikus) energiaeloszlása egy egyensúlyi eloszlás felé tart, amikor is a sok-részecske eloszlás egy-részecske eloszlások szorzatára faktorizálódik. Ez a híres H-tétel, aminek korolláriuma, fontos üzenete az, hogy van egy mennyiség, ami az egyensúlyhoz tartás során csak egy irányban változik. A H mennyiség nem nőhet, negatívja, ami az entrópiával azonos, nem csökkenhet. Ez óriási lépés, az entrópia növekedési tétel mezoszkópikus magyarázatát nyújtja [10,11].

Nem mindenki fogadta el ezt az eredményt. Hiszen a molekuláris káosz megfordítható, bármely páros ütközés lejátszható az időben visszafelé haladva is. S ez fizikailag, mikro-részleteiben semmiben sem különbözik az időben előrehaladó folyamattól. Hogyan lehet mégis, hogy Boltzmann azt állítja, hogy ilyen folyamatok statisztikai eredője egy makroszkópikus változás, ami az idő irányát kijelöli?

Prominens kritikus volt Henri Poincaré, aki a mozgások dinamikai elméletét tanulmányozva bebizonyította, hogy a helyek és sebességek ún. fázisterében, bármely pont tetszőleges közelségébe visszatérnek a pályák. Ez Boltzmannt nagyon bántotta. Ma már úgy gondoljuk (és tanítjuk), hogy mindkét levezetés igaz a maga helyén: a Boltzmann féle „felejtős" gázelméletben tényleg nő az entrópia, míg Poincaré visszatérése a kezdeti állapothoz olyan extrém hosszú időt kíván, amely exponenciálisa egy a részecskék számával növő mennyiségnek. Az általunk látható univerzumról ráadásul még mindig nem tudjuk, hogy zárt rendszer-e. Minden esetre eddigi létezési ideje sokkal kisebb a Poincaré -féle visszatérési időnél a kezdeti állapotába. Ez a becslés az univerzum összes energiakvantumának (elemi részecskék, atomok, főleg hidrogén, s a fotonok száma, ami a nehéz részecskék számának mintegy milliárdszorosa) a számán alapul.

A 20. század végére még egy érdekesség említendő, bár nem kapott különösebb figyelmet: egy anti-H-tétel is bizonyítható. Itt azt kell feltételezni, hogy a páros ütközés *utáni* impulzus-eloszlások függetlenek, s ekkor az idő iránya megfordul, H mindig nő, az entrópia mindig csökken. Ezzel helyreáll az időirány szimmetriája. Vagyis valójában a Boltzmann-féle levezetés az entrópia növekedéséről már eleve, a feltevéseivel megsértette a múlt – jövő szimmetriát. Az időirány aszimmetriája tehát most szemléleti vagy ténykérdés? Idézzük Stephen Hawkingot:

"You may see a cup of tea fall off a table and break into pieces on the floor... But you will never see the cup gather itself back together and jump back on the table. The increase of disorder, or entropy, is what distinguishes the past from the future, giving a direction to time." ~ Stephen Hawking [12].

„Bármikor láthatsz egy teáscsészét leesni az asztalról és darabokra törni… Azonban sohasem fogod látni ahogy a csésze újra összeszedi magát és visszaugrik az asztalra. A rendetlenség növekedése, vagy az entrópia, az ami megkülönbözteti a múltat a jövőtől, ami irányt ad az időnek."

A mögöttes lényeg az, hogy sokkal kevesebb rendezett állapot van, mint rendezetlen. Vagyis az entrópia úgy kötődik a rend – rendetlenség párhuzamhoz, hogy közben méri az ekvivalens állapotok számát: egy adott makroállapothoz számtalan mikroállapot tartozhat. Ekkor hiába egyenlő valószínűségűek a mikroállapotok, a makroállapotok közül az fog gyakrabban megvalósulni, s a természetben gyakrabban előfordulni, amelyikhez több mikroállapot tartozik.

Ezzel visszatérünk Boltzmannhoz. Az ún. permutációs entrópia az összes, a mikroállapotok egymás közti felcserélésével nyert lehetőség számának a logaritmusa. Feltételezve, hogy összesen N mikroállapot van, akkor ezek N! (N faktoriális, a számok szorzata 1-től N-ig) sorrendbe rendezhetők. Ugyanakkor, ha ezek különböző makroállapotokra, az emberi léptékkel mérve megkülönböztethető állapotokba rendeződhetnek, amelyekben rendre $N_1, N_2, \dots N_r$ mikroállapot vesz részt, akkor az ismétléses permutációk képletével kell megszámolni az eseteket:

$$W = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\dots N_r!}$$

a lehetőségek száma. Ennek logaritmusa nagy számok esetén a Stirling formula alapján, vezető rendben az N log N típusú tagokat tartalmazó különbség,

$$logW = NlogN - N_1 logN_1 - N_2 logN_2 - \dots - N_r logN_r.$$

Megfigyelve, hogy az egyes megkülönböztetett állapotok valószínűsége éppen $p_i = N_i/N$-nel közelíthető, megkapjuk Boltzmann entrópia képletét:

$$S = \frac{1}{N} logW = (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_r) logN - (p_1 logp_1 + p_2 logp_2 + \dots + p_r logp_r)$$

Mivel az összes lehetőséget számba véve $N = N_1 + N_2 + \dots + N_r$, a p_i valószínűségek összege 1, s ezért az eredmény univerzális, a mikroállapotok N számától független,

$$S = -\sum_{i=1}^{r} p_i \, logp_i \quad .$$

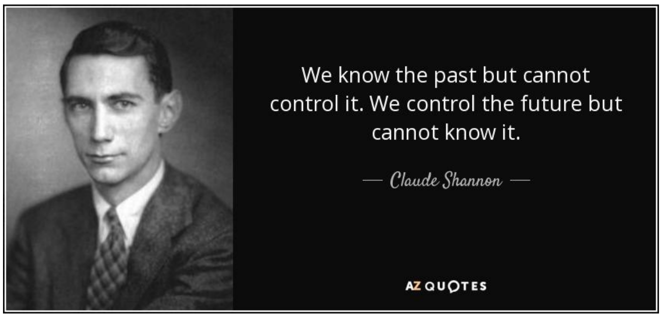
Másrészt, ha az átlagenergia rögzített, akkor ez az entrópiaképlet éppen akkor ad maximumot, amikor a valószínűségek a megfelelő állapotok energiáitól exponenciálisan csökkenő módon függnek,

$$p_i = \frac{1}{Z} exp(-E_i/T).$$

Ez az energiaeloszlás a Boltzmann-eloszlás, míg ugyanez a gázmolekulák sebességére nézve a Maxwell eloszlás. Fontos tulajdonsága, hogy amíg az entrópia a lehetőségek számának logaritmusa, addig ennek fordítottja (inverze) az, hogy a lehetőségek száma az entrópia exponenciálisa. Ez azt jelenti, hogy amikor a megvalósulási számok szorzódnak, és független rendszerek összetételekor ez a szokásos feltevés, akkor az entrópia összeadódik, additív.

A termodinamika későbbi, axiomatizáló változatai ezt az additivitást alapfeltételnek tekintik. Ami ugyanakkor nem minden helyzetben igaz. Ennek mélyebb megértéséhez ki kell térni az entrópia képlet és fogalom szerepére az információelméletben.

3. Információs tömörítés



Claude Shannon:

Ismerjük a múltat, de nem irányíthatjuk. Irányítjuk a jövőt, de nem ismerjük [13].

Az entrópiának, ami eredetileg egy hőelméleti fogalom s kiderült, hogy egyben a mikroszkópikus (atomi, molekuláris) rend és rendetlenség mértéke is, köze van a tudáshoz, az információhoz. Ezt már Maxwell felvetette, amikor gondolatkísérletet javasolt egy démonnal: a démon megfigyeli a gázmolekulákat, s amikor egy túl lassút lát, kinyit egy ablakot és átengedi egy másik térfélbe, ugyanakkor, ha onnan jön egy gyorsabb, akkor becsukja. Így egyenkénti válogatással a hidegebb térfelet még hidegebbé, energiában szegényebbé teheti, míg a melegebbet még forróbbá, energiában gazdaggá. Csakhogy ez ellentmond a termodinamika második főtételének, ami szerint a hő, ami nem más, mint a molekulák mozgási energiája, nem mehet a hidegebb testről a melegebbre, hanem csak fordítva. Az entrópiának nőnie kell [13-21].

Ezt a felvetést Szilárd Leó elemezte s rámutatott, hogy egy ilyen démon végtelenül felmelegedne, s ezzel a két térfél plusz a démon három-test-probléma teljes entrópiája továbbra sem csökkenhet. A démon válogatása felmelegíti őt, az információnak és a hőnek valami mély kapcsolatban kell állni egymással [21]. A legújabb kutatások (pl. Evans) a molekuláris „gépek” tanulmányozása során megállapították, hogy időlegesen, mikroméretben az entrópia akár spontánul csökkenhet is, csak ugyanakkora csökkenés exponenciálisan valószínűtlenebb a növekedésnél. Ugyanez látható a számítógépes szimulációkban is: az entrópia minden véges rendszerben fluktuál, még az energia megmaradása mellett is, csak trendszerűen nő, ahogyan az egyensúlyhoz közeledik a zárt rendszer [22,23].

A Boltzmann féle entrópiaképlet, az entrópia kiszámítása a különböző állapotok valószínűségeiből alkalmazható az információ egységeire is. Ezt először Claude Shannon mutatta meg a bitek, a binárisan eldönthető információ-morzsák elemzésével [8]. Levezetése a korábban népszerű Barkochba játékhoz hasonló: úgy kell kitalálni valamit, hogy csak igen vagy nem válaszokat kapunk. Ez a kétértékű válasz a „bit”, ezek sorozata tömöríti az információt. Lehet az „igen” az 1, a „nem” a 0 jel, ekkor egy N hosszúságú jelsorozat (bit strang) minden eleme kétféle lehet. Ez összesen – az ismétléses variációk képletét alkalmazva – 2^N lehetőség.

A Barkochbában jól kell kérdezni. A leggyorsabban úgy jutunk el a feladvány kitalálásához, ha minden lépésben a feltett kérdésünk nagyjából felezi a hátramaradt lehetőségeket. Ekkor jutunk el N lépésben (igen/nem válaszokkal) a $W = 2^N$ lehetőség egyikéhez – a feladvány megfejtéséhez. Szaknyelven ez azt jelenti, hogy a bináris fa kiegyensúlyozott. Ugyanakkor W lehetőség esetén a legrövidebb kérdésút hosszát megadó képlet ennek a megoldása, $N = log_2 W$.

A Shannon féle entrópiaképlet ezért megegyezik Boltzmannéval, csak a természetes logaritmus helyett a 2-es alapút használja. Ennyire általánosítva az entrópiát már csak az elvont tulajdonságok axióma-szerű megkövetelése marad: 1) az entrópia nem lehet negatív, 2) csak akkor nulla egy állapotban, ha az az egyetlen lehetőség (vagyis a biztos igen és a biztos nem, a nulla és 1 valószínűségű eseményre), 3) ha egy lehetetlen eseményt veszünk hozzá az eddigiekhez, az nem változtat a teljes entrópián és 4) az entrópia a valószínűségek konvex függvénye. Ez utóbbiból már következik, hogy – további feltételek hiánya esetén – az egyenletes eloszlásra maximális az entrópia. Van még egy ötödik axióma is, az, hogy független eseményekre, amikor a valószínűségek szorzódnak, az entrópia additív, vagyis összeadódik. Ezt az ötödik feltételt sok modern entrópiaképlet elveti, s a lehetséges képletek gazdagabb tárházát tárja fel. Ugyanakkor Rényi Alfréd, magyar matematikus 1960-ben már megfogalmazott egy általánosított képletet, ami szintén összeadódik szorzat esetén, de szerepel benne egy további paraméter a Boltzmann konstanson túl – ami az informatikai entrópiában nem játszik szerepet. A Boltzmann entrópia a Rényi és Tsallis képletek speciális esete. A Rényi entrópia megőrzi az additivitási tulajdonságot, a Tsallis entrópia nem additív, azonban várható értékként jelenik meg, míg a Rényi entrópia nem [24,25,26].

Jakovác Antallal közösen nemrég megjelent egy cikkünk a mesterséges intelligencia gépi tanulása során csökkenő entrópiáról [27]. Az eredmény nem meglepő, elismerve, hogy a tudás az entrópia csökkenését feltételezi – a tudásra szert tevő alrendszerben. Mint egy olyan Maxwell démon, amibe hűtőgépet is építettek. A mesterséges intelligenciát futtató hardverek valóban jelentős hűtést kívánnak, akárcsak a működő emberi agy.

Itt olyan funkciók, amelyek osztályozáson alapulnak, mint a mintafelismerés, az észlelt képeket – bitsorozatok formájában – releváns és irreleváns bitekre osztják a tanulás eredményeképpen. A releváns bit, ami az osztályt írja le s ezért minden oda tartozó egyedi mintára azonos, rögzített lesz: 1 ha egy kép (mintázat) beletartozik az osztályba (pl. kutya) és 0, ha nem (pl. macska, autó, ember stb.). A maradék bitek az irrelevánsok (pl. dog, pincsi, agár, boxer stb.). Ezek továbbra is véletlenszerűek maradnak, összességük azonban egy rövidebb bitsorozat. Így csökken az AI entrópiája. Ugyanakkor ezzel az algoritmussal elvileg azt is felismerheti egy AI, ha valamit nem ismer fel – ez automatikusan a „nem kutya" kategóriába kerül.

Az irreleváns bitek továbbra is véletlenszerűek, az átlaguk ½. De mivel a tanulás végén kevesebb ilyen bit van, és Shannon képlete szerint a rögzített – akár nulla, akár egy – bitek entrópia-járuléka nulla, a teljes entrópiája egy tanult rendszernek kisebb mint a tanulatlannak.

Vajon általánosítható ez az eredmény? A rendetlenség, a véletlenszerűség csökkenése lenne a tanulási folyamatok legfontosabb fizikai következménye? A gépi tanulás hardvereiben megannyi Maxwell démon működik, amiket (akiket?) éppen ezért hűteni kell? Ez minden esetre egy átgondolandó felvetés.

A következő két fejezetben az entrópia nem hagyományos szakterületeken való két alkalmazását mutatom be, ami az entrópia történetének legfiatalabb – kortárs – eseményeihez kapcsolódnak: a megállíthatatlan gravitációs összeomlást leíró fekete lyukakhoz társított entrópia történetét és a szociális-gazdasági folyamatok entrópiához kapcsolásával próbálkozó kortárs elméletek egy szűk szeletét. Ezen kutatások egy-egy szeletéhez magam is aktívan hozzájárultam az utóbbi 10-15 évben.

4. A sugárzás és a fekete lyukak entrópiája

Max Planck, aki leginkább a kvantumfizika egyik szellemi atyjaként ismert, pályája kezdetén a termodinamika mélyebb kérdéseivel foglalkozott. Kirchoff nyomdokain, a hőmérsékleti egyensúlyban levő, adott hőmérsékletű ideális, ún. fekete testek sugárzását tanulmányozva ismerte fel, hogy a rövid és a hosszú hullámhosszú spektrumrészek más-más törvényt látszanak követni, miközben a maximális intenzitás helye – az ún. Wien törvényt követve – fordítottan arányos az abszolút hőmérséklettel. A híres Planck-féle sugárzási képlet egy interpoláció e két tartományra külön-külön érvényes formulák között.

Az talán már kevésbé ismert, hogy ezt a képletet az entrópiára vonatkozó áthidaló képlet alapján újra levezette. (Az entrópia energia szerinti első deriváltja a reciprok hőmérséklet, a második pedig kapcsolatos az állandó térfogaton vett hőkapacitás reciprokával.) Ezt a levezetést Simonyi Károly is röviden ismerteti „A fizika kultúrtörténete" című könyvében (Gondolat 1979).

Az entrópia fontos volt Planck számára. Fiatalabb kollégája és pártfogoltja, Albert Einstein, a fentiekből adódó egyensúlyi energiaeloszlást a fotonok statisztikus eloszlására vezette vissza Nat Bose indiai fizikussal közösen. Ezt az eloszlást azóta – amit Planck egy elektromágneses sugárzással töltött üreg és a falában levő kvantált atomi oszcillátorok modelljéből is kiszámolt – Planck eloszlásnak nevezzük (főleg a csillagászatban) illetve Bose-Einstein eloszlásnak (főleg a fizikában). Szigorúan véve az első a spektrális eloszlás, ami a fotonok energiájának az eloszlása, a második pedig a fotonok impulzusának az eloszlása – analógiában a Maxwell és Boltzmann eloszlással.

Kvantumfizikai rendszerek entrópiáját általában a Boltzmann-Shannon-Planck képlet alapján számoljuk, csak az eloszlás valószínűség-sűrűsége helyett egy ún. sűrűség operátort alkalmazunk a képletben. Ezt az általánosítást Neumann János vezette be. De minthogy a klasszikus entrópiaképletnek is használjuk a logaritmusosnál általánosabb formáit, a kvantum összefonódott rendszerek elemzéseiben is fel-felbukkan a Rényi -féle képlet, többnyire a $q=2$ extrém paraméterrel ($q=1$ volt a klasszikus képlet).

Úgy tudjuk, hogy Albert Einstein, bár a kvantumfizika születésében vezető szerepet vitt, pl. a fotonok statisztikáját és kvantált energiacsomag jellegét ő igazolta először s végül a fotoeffektusért kapott Nobel díjat, a koppenhágai interpretációval (és teszem hozzá, az abból fakadó operátoros formalizmussal) sohasem értett egyet. Ez a formalizmus túlságosan intuíció ellenes ahhoz, hogy a fizikai lényeget megragadja. A mérési folyamat „beugrás” jellegét pedig képtelen igazolni az elmélet keretein belül; ez egy extra kikötés.

Az általános relativitás elmélete, mindmáig az egyik legszebb fizikai elmélet, és mindmáig összeegyeztethetetlen a kvantummechanikával. De harmonikus viszonyban áll a termodinamikával, sőt az Einstein egyenlet bizonyos megoldásai, amelyek egy gravitációsan szinguláris – végtelen téridő görbületű – pontot egy úgynevezett horizonttal vesznek körül, az entrópia törvényével analóg módon viselkednek.

Természetesen fizikai rendszerek esetén az entrópia mellet az energia és a hőmérséklet is szerepet játszik. Mindezek analógiáját a fekete lyukakat körbe ölelő eseményhorizontok esetén Stephen Hawking és David Bekenstein kezdeményezték [28-30]. A hőmérséklet arányosnak adódik a horizonton mérhető helyi (vöröseltolódás faktortól megfosztott) gravitációs gyorsulással, míg az entrópia az eseményhorizont felületével arányos. A legegyszerűbb, szférikus (Schwarzschild féle) fekete lyuk esetén ez pusztán a dE=TdS képlet analógiája. Itt az eseményhorizontot létrehozó teljes tömeghez kapcsolódó $E = Mc^2$a belső E energia, míg $kT = \frac{\hbar}{2\pi c} g$ a gyorsulásnak megfelelő hőmérsékleti energia. Ez a képlet megegyezik az ún. Unruh hőmérséklettel, amit egy az együttmozgó rendszerben állandó gyorsulású lineáris trajektórián mozgó monokromatikus forrás folyamatos Doppler-eltolódásból adódó sugárzási képletében a távoli megfigyelő Planck eloszlás hőmérsékleteként észlel. Itt a sebesség, s ezzel a Doppler eltolódás ugyanis folyamatosan változó az időben, s ezért a spektrális felbontás nem pusztán egy eltolódott spektrumvonal lesz, hanem ilyenek folytonos burkolója. Megrázó matematikai tény, hogy ez a burkoló éppen Planck eloszlásnak látszik, a fenti hőmérséklettel. Vagyis egy végtelen ideig állandó gyorsulás egy monokromatikus (egyetlen frekvenciát tartalmazó) jelből egy fekete test hőmérsékleti Planck spektrumot varázsol.

Miután a gravitációs gyorsulás az eseményhorizont sugarával összefügg, $g = \frac{GM}{R^2}$, és ezt a sugarat az Einstein egyenletek Schwarzschild megoldásán keresztül szintén a forrástömeg, M, határozza meg, $R = \frac{2GM}{c^2}$, könnyű levezetni az entrópiát: $S = \frac{4\pi k}{\hbar c^5} G \cdot E^2 = \frac{kc^3}{\hbar G} \pi R^2$. Vagyis a fekete lyuk entrópia az eseményhorizont felszínével (annak negyedével), s ezért az energia négyzetével lenne arányos, míg az abszolút hőmérséklet az energia reciprokával arányos. Ez egy problémát okoz: ha a hőmérséklet az energia csökkenő függvénye, akkor a fajhő negatív, és minél kevesebb az energia annál forróbb a fekete lyuk. Ez vezet az információs paradoxonhoz, ha figyelembe vesszük a Hawking sugárzást: ugyanis minden pozitív abszolút hőmérsékletű test elvileg energiát sugároz s ezzel veszít. Nulla energia (és tömeg) értéknél végül a fekete lyuk eseményhorizontja végtelenül forrónak tűnik, s végtelenül sok energiát sugároz. Közben a sugara s ezzel a felülete s ezzel az entrópiája nullához tart, ami végtelen hőmérséklet mellett egy informatikai paradoxon: végtelen hőmérsékleten a Boltzmann eloszlás is egyenletessé válik, s így az entrópia maximális, ami nem lehet nulla.

Czinner Viktor, Hideo Iguchi és Ván Péter kollégáimmal kísérletet tettünk ennek a paradox helyzetnek a feloldására [31,32]. Sajnos a megoldásunk nem lett népszerű a szakértők körében, mert csak erre a speciális esetre dolgoztuk ki – később a forgó és töltött fekete lyukak Kerr megoldására már bonyolultabb a matematika. A mi javaslatunk lényege a dE+pdV=TdS forma használata. Ehhez meg kell konstruálni a térfogat jellegű menyiséget. Intuitíven ez a következő: míg a fekete lyuk Hawking sugárzással párolog a tömeg- és energiavesztesége arányos hőmérséklet negyedik hatványával és a felszín nagyságával. Ez összességében egy a kezdeti sugár köbével arányos teljes elpárolgási időt ad. Ezen idő alatt, rétegről rétegre, ennek c-szeresével rövidül a sugár. Végül az eseményhorizont felszíne szorozva c-vel és ezzel az idővel ad egy térfogatot, ami arányos a sugár ötödik hatványával $V \sim R^5$. Ez egy fizikailag értelmes nyomástagot ad, hiszen $dE \sim dM \sim dR \sim pdV \sim 5pR^4 dR$-ből következik $p \sim 1/R^4 \sim T^4$ami minden feketest sugárzásra igaz. Megjegyezzük, hogy egy $V \sim R^5$jellegű térfogat az általános geometriában is megfogalmazható, a Christodopoulos-Rovelli térfogat éppen így viselkedik.

5. Entrópiaszerű mennyiségek a szociális fizikában

A gazdasági egyenlőtlenségeket jellemző nulla és egy (azaz 100%) közötti mértékszámot, a Gini indexet Corrado Gini vezette be az 1920-as években [33]. Ez azt vizsgálja, hogy a népesség hány százaléka birtokolja a teljes vagyon hány százalékát. Ha ezt a két mennyiséget egymással szemben ábrázoljuk, akkor az ún. Lorenz görbét kapjuk: minél inkább eltér ez a görbe a diagonálistól, annál nagyobbak az eloszlásban rejlő különbségek [34].

Ha mindenkinek ugyanannyi lehet csak a vagyona, vagy jövedelme, akkor egy extrém kommunisztikus rendszert kapunk. Akkor a népesség 100%-a ugyanazt a vagyont, a birtokolható vagyon 100%-át birtokolja. Ebben az esetben az x-nél több vagyonnal rendelkezők hányada függvényében a náluk levő vagyon hányada egy diagonális egyenes. Ha a gazdag végéről gyűjtjük az adatokat, akkor a – minden egyes elem esetén pozitív – vagyon hányadgörbéje a populációs hányadgörbe felett halad.

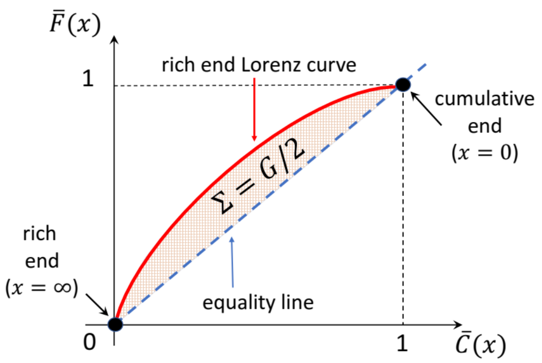
Különböző korokban és különböző nemzeteknél, területeken ez a görbe más és más. Mégis sok hasonlóság van köztük, matematikailag néhány egyszerű osztályba sorolhatók. A G Gini index a görbe és a diagonális közötti terület kétszerese. Egyenletes elosztás esetén G=0, míg maximum egy háromszög területe fér be a hányadok négyzetébe a diagonális felett, ami ½, de erre G=1. A különböző nemzetek és évek összehasonlítása a gazdasági és társadalmi egyenlőtlenségek mérését számokkal kifejezhetővé teszi – persze több más mérőszám javaslat („index") is forog a szakirodalomban.

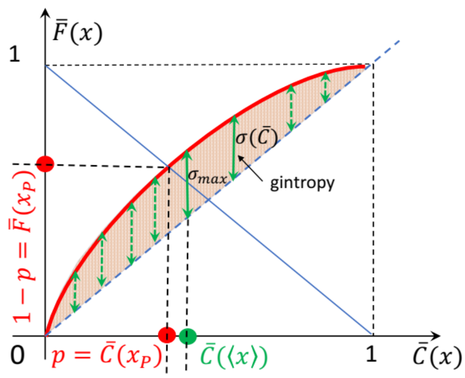
Idézve Corrado Gini-t:

„The most notable difference (of the American character) lies in the psychology of work. In the Orient one works to live; in Europe one works to consume; in America one works to work. These are the three stages of a progressive evolution."

„Az amerikai jellem legfigyelemreméltóbb különbsége a munkához való hozzáállásban jelenik meg. Keleten az ember azért dolgozik, hogy megéljen; Európában azért, hogy fogyasszon; Amerikában azért, hogy dolgozzon. Ez egy haladó evolúció három lépcsőfoka."

Forrás: The Work of the Catholic Church in the United States of America (Nardini "Artistic" Publishing Company, 1956), p. 10.





A fenti ábrákon egy-egy Lorenz görbe látható. A baloldali ábra a fél Gini index területi jelentését, a jobboldali a dzsintrópia értékeit zöld vonalakkal. Ezen túlmenően a szövegben nem elemzett Pareto arány megállapítását is szemléltetjük, amikor a népesség p hányada a vagyon 1-p hányadát birtokolja. A klasszikus arány p=20% birtokában a vagyon 1-p=80%-a. Modern felmérések szerint ez jellemzően inkább 10%-90%.

Néda Zoltán és Telcs András professzorokkal mi a terület helyett a görbe és a diagonális különbségét javasoljuk vizsgálni [35-37]. Ez a „gintropy"-nak, dzsintrópiának nevezett mennyiség ugyanis az entrópiához hasonló viselkedést mutat. Ennek maximuma a Kalkutta index, vezető ekonofizikusok egyik kedvence. Ezen görbe a két végpontban (nulla népesség és a teljes népesség végpontjaiban) egyaránt nulla, különben mindig pozitív. Görbülete is mindig azonos előjelű, míg az átlagjövedelemre (vagyonra) maximális. Belőle mind Gini index, mind entrópia számolható.

Nemcsak vagyonra és jövedelemre, hanem bármely valószínűség eloszlásra kiszámítható a Lorenz görbe, a dzsintrópia és a Gini index – s az összes többi index is. Ugyanakkor az entrópia Boltzmann vagy Shannon képlete is. Érdekes, hogy a dzsintrópia a kumulatív százalékok függvényében hasonló képletekre vezet, mint a hagyományos entrópia a valószínűségek függvényében [39]. A kumulatív százalékok ugyanis a normált valószínűségek rész-összegei, egy adott érték felett. Megtaláltuk a Boltzmann képlet analógját – pontosan az exponenciális eloszlás esetén. Ugyanakkor a Tsallis képlet érvényes a kapitalista társadalmakra általánosan jellemző Pareto eloszlás esetén. A kvantum összefonódás kapcsán néha alkalmazott q=2 Rényi entrópia képletének analóg kifejezését pedig akkor kapjuk, ha egy szűkre szabott tartományon belül minden érték (jövedelem, vagyon) egyformán lehetséges. Ez az „ablakszerű" eloszlás a hagyományos skandináv szociáldemokrata jóléti modellt juttatja eszünkbe.

A Pareto eloszlás, ami nem exponenciális, hanem hatványfüggvény lecsengésű a nagy értékekre, nemcsak a jövedelmi viszonyoknál fordul elő: nagyon sok jelenség mutat ilyen eloszlást. Az utóbbi években Néda Zoltánnal dolgoztunk ennek matematikai hátterét leíró véletlen folyamat modellen, a Local Growth Global Reset (lokális növekedés globális visszahelyezés) modell kis lépésekben csak növekedést enged, míg bármely állapotból egy visszahelyezést a kezdeti állapotba. Ebben a modellben [37,38], ha mindkét fajta átmenet rátája azonos, akkor az egyensúlyi eloszlás Boltzmann -féle exponenciális, ha viszont a növekedés lineárisan preferenciális (akinek van, annak adatik, ezért a kis növekedés gyakoribb a már nagyobb értékekből kiindulva), akkor Pareto eloszlás. Ez az eloszlás ugyanakkor a Tsallis entrópiát maximalizálja adott összenergia (összes vagyon) mellett [39].

Ez a rövid összefoglaló az entrópia történetéről, valamint sokoldalú és egyben mély értelmű alkalmazásairól remélhetőleg felkelti az Olvasó érdeklődését a matematikai háttér tanulmányozása iránt. Az áttekintés a teljesség igénye nélkül készült, többek közt kimaradtak olyan érdekes aspektusok, mint a kaotikus dinamika alapján számolt Kolmogorov-Sinai entrópia vagy az Einstein egyenletek levezetése termodinamikai erőként Verlinde nyomán.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A hátteret alkotó elméleti és statisztikus fizikai kutatásokat az UEFISCDI, támogatta a PN-III-P4-ID-PCE-2020-0647 szerződés alapján.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

[1] A cikkben szereplő idézetek és háttérképeik a https://www.azquotes.com/ linkről valók.
[2] Clausius R., https://www.azquotes.com/author/28148-Rudolf_Clausius
[3] Clausius R., *Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorien,* Annalen der Physik und Chemie 93 (12), 481-506, 1854.
[4] Clausius R., *Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichnungen der mechanischen Wärmetheorie,* Ann. Phys. 125, 390, 1865.
[5] Carnot S., Reflexions sur la puissance motrice du feu; Bachalier, Paris 1824.
[6] Carnot S., https://www.azquotes.com/author/76849-Nicolas_Leonard_Sadi_Carnot
[7] Joule J.P., https://www.azquotes.com/author/23615-James_Prescott_Joule
[8] Maxwell J.C., https://www.azquotes.com/author/21477-James_Clerk_Maxwell
[9] Boltzmann L., *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen,* Sitzungsberichte der Wissenschaften 66, 275-370, 1872.
[10] Lesovik G.B., Lebedev A.V., Sudovskyy I.A., Suslov M.V., Vinokour V.M., *H-theorem in quantum physics,* Scientific Reports 6, 32815, 2016.
[11] Hawking S., https://www.azquotes.com/author/6401-Stephen_Hawking
[12] Shannon C., https://www.azquotes.com/author/25420-Claude_Shannon
[13] von Neumann J., *Beweis des Ergodensatzes und des H-Theorems in der neuen Mechanik,* Z. Phys. 57, 30-70, 1929.
[14] Lindblad G., *Completely positive maps and entropy inequalities*, Comm. Math. Phys. 40, 147, 1975.
[15] Wehrl A., *General properties of entropy,* Rev. Mod. Phys. 50, 221-260, 1978.
[16] Hill M., *The Maxwell-Boltzmann distribution*, Georgia Institute of Technology, 2013.
[17] Merali, Z., *Demonic device converts information to energy,* Nature News, 2010.
[18] Cropper W., *Great Physicists: The Life and Times of Leading Physicists from Galileo to Hawking,* Oxford University Press (pp 118), 2016.
[19] Sir William Thomson (Lord Kelvin), *Kinetic Theory of the Dissipation of Energy,* Nature, April 9, pp 441-444, 1874.
[20] Thomson W. (Kelvin), *The Sorting Demon of Maxwell*; Popular Lectures and Addresses, vol i, pp. 144-148, 1879.
[21] Szilárd L., *Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen*; Zeitschrift für Physik 53, 840, 1929.
[22] Bennet C.H., Demons, *Engines and the Second Law*, Scientific American 257(5), pp. 108-116, 1987.
[23] Strasberg P., Schaller G., Brandes T., Esposito M., *Thermodynamics of a Physical Model Implementing a Maxwell Demon,* Phys. Rev. Lett. 110(4), 040601, 2013.
[24] Tsallis C., *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics, Approaching a Complex World*, Springer Science+Business Media 2009

[25] Biró T.S., *Is There a Temperature? Challenges at high velocities, acceleration and complexity*. Springer Science+Business Media, 2011

[26] Biró T.S., Jakovác A., *Emergence of Temperature in Examples and Related Nuisances in Field Theory,* Springer Briefs in Physics, Springer New York, 2019.

[27] Biró T.S., Jakovác A., *Entropy of Artificial Intelligence*, universe (mdpi) 8, p-53, 2023.

[28] Bekenstein A., *Black holes and the second law*, Lett. Nuovo Cimento 4(15), 99, 1972.

[29] Hawking S.W., *Particle Creation by black holes*, Comm.Math.Phys. 43(3), 199, 1975.

[30] Strominger A., Vafa C., *Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy,* Phys.Lett.B 379(1-4), 99, 1996.

[31] Biró T.S., Czinner V.G., Iguchi H., Ván P., *Black hole horizons can hide positive heat capacity;* Phys.Lett.B 782, 228, 2018.

[32] Biró T.S., Czinner V.G., Ván P., Iguchi H., *Volume dependent extension of Kerr-Newman black hole thermodynamics*, Phys.Lett.B 803, 135344, 2020.

[33] Gini C., *Measurements of inequality of income*, Economic Journal 31, 124, 1921.

[34] Lorenz, M.O., *Met[hods of measuring the concentration of wealth,* Publications of American Statistical Association 9(70), 209, 1905.

[35] Biró T.S., Néda Z., *Gintropy: A Gini Index Based Generalization of Entropy*; Entropy 22, 879, 2020.

[36] Biró T.S., Telcs A., Józsa M., Néda Z., *f-Gintropy: an Entropic Distance Ranking based on the Gini Index,* entropy 24, 407, 2022.

[37] Gere I., Kelemen S., Biró T.S., Néda Z., *Wealth distribution in villages. Transition from socialism to capitalism in view of exhaustive wealth data and a master equation approach,* Frontiers in Physics 10, 827143, 2022.

[38] Biró T.S., Néda Z., *Unidirectional random growth with resetting*, Physica A, 499, 355, 2018.

[39] Pareto V., *The New Theories of Economics,* J. Political Economics 5(4), 485, 1897.