

# MHD-nanofolyadék áramlási viszonyainak elemzése ellenirányú, forgó porózus közegben

## Analysis of MHD nanofluid flow conditions in a counter-rotating porous medium

WEKESA Simon Waswa<sup>1</sup>, Dr. MUTUKU Winifred Nduku<sup>2</sup>, Dr. HRICZÓ Krisztián<sup>1</sup>

<sup>1</sup>University of Miskolc, 3515 Miskolc-Egyetemváros, Egyetem út 1, Hungary

<sup>2</sup>Kenyatta University, P.O. Box 43844-00100, Nairobi, Kenya

[simon.waswa.wekesa@student.uni-miskolc.hu](mailto:simon.waswa.wekesa@student.uni-miskolc.hu)

[mutku.winifred@ku.ac.ke](mailto:mutku.winifred@ku.ac.ke)

[krisztian.hriczo@uni-miskolc.hu](mailto:krisztian.hriczo@uni-miskolc.hu)

### Abstract

*We investigate the effect of a magnetic field perpendicular to the flow direction on a nanofluid flowing through a porous medium. We derive the governing equations of the model, taking into account heat transfer mechanisms and the thermophysical properties of the suspension as boundary conditions. We reduce the resulting partial differential equations to a system of ordinary differential equations, for which we obtain a numerical approximate solution using the bvp4c method. We illustrate the effect of the parameters on the flow process using figures.*

**Keywords:** Hydromagnetic flow, nanofluid, porous media, radiation, similarity solution

### Kivonat

*Porózus közegben áramló nanofolyadék esetén az áramlási irányra merőleges mágneses mező hatását vizsgáljuk. Felírjuk a modell meghatározó egyenleteit, ahol peremfeltételként vesszük figyelembe a hőátadás módjait illetve a szuszpenzió termofizikai tulajdonságait. Az így kapott parciális differenciálegyenleteket visszavezetjük közönséges egyenletrendszerre, melynek a numerikus közelítő megoldását a bvp4c módszerrel állítjuk elő. Ábrákon keresztül mutatjuk be a paraméterek hatását az áramlási folyamatra.*

**Kulcsszavak:** Hidromágneses áramlás, nanofolyadék, porózus közeg, sugárzás, hasonlósági megoldás

## 1. BEVEZETÉS

A hőátadás számos mérnöki és ipari folyamatban kiemelt szerepet játszik, hiszen biztosítja az energia hatékony felhasználását, javítja a rendszer teljesítményét, azaz támogatja a modern technológiai folyamatok fejlesztését. A hőátvitel fontossága megfigyelhető az energiatermelésben, az űrhajózási rendszerekben, a hűtési folyamatokban, az orvostudományban, az épületek hűtő és fűtő rendszerének megbízhatóságában, valamint az ipari igényeket kielégítő optimalizált mérnöki tervezésben.

A nanotechnológia fejlődésével megjelentek a folyadékmechanikai alkalmazások is, azaz a nanofolyadékok, melyek egy alapfolyadék és valamely nanorészecske stabil szuszpenzióját jelenti. Amennyiben az alkalmazott nanorészecske mágnesezhető, akkor magnetohidrodinamikus folyadékról (MHD nanofolyadék) beszélünk. Napjainkban számos tanulmányban foglalkoznak ilyen folyadékok fejlesztésével, tesztelésével és gyakorlati alkalmazásával [1,2,3].

A kutatók az ipari igények által elvárt kihívások kezelésére és a hatékonyság növelése érdekében fejlesztik és elemzik a nanofolyadékok termofizikai tulajdonságait. Például biokonvektív nanofolyadék áramlást vizsgálta Sadaf és társai [3], akik részletes fizikai elemzést végeztek a modellezett áramlási paraméterek hatásának megfigyelésére. Megállapították, hogy az azimutális sebességkomponens a nyújtási és a forgási paraméterek arányának növekedésével nő, illetve a paraméterek arányának változása fokozza a hőmérsékletprofil csökkenését.

Abbas és társai [4] hibrid nanofolyadék porózus közegbe ágyazott, megnyúló/zsugorodó lemez felett kialakuló kétdimenziós, összenyomhatatlan, ferde stagnációs pont áramlását vizsgálták. Tanulmányukban összehasonlították a Yamada-Ota és a Xue modelleket, melyek két jól ismert hővezető képesség jellemzésére szolgáló formulák. A vizsgálatot grafén és vas-oxid, magnetit nanorészecskék nem-Newtoni motorolajban történő diszpergálásával keletkező nanofolyadékokon végezték el. Az eredményeik különösen értékesek a porózus hőkezelő rendszerek hő- és tömegátadásának optimalizálása szempontjából.

Egy Eyring–Powell-típusú diffúziós folyadék forgó kúpon átáramló magneto-biokonvekciós áramlását vizsgálta Patil szerzőtársaival [5], ahol figyelembe vették az oxitaktikus mikroorganizmusok hatását is. A forgó kúpon átáramló áramlás matematikai elemzéséhez a Mangler féle nem-hasonló transzformációt alkalmazták. A periodikus mágneses mező hatására a felületi gradiensek, nevezetesen a felületi súrlódás, hullámzó hatásokat mutatnak a határreteg tartományában.

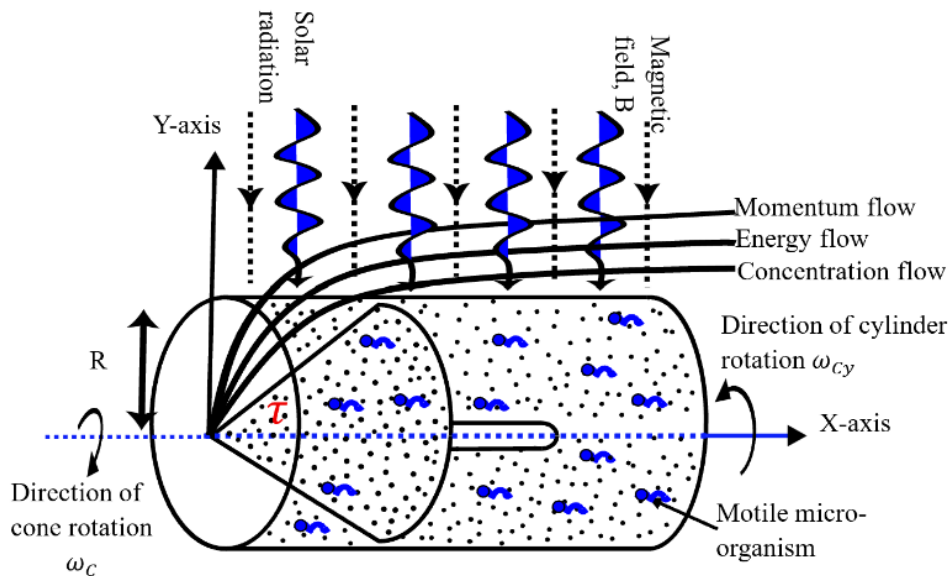
Elágazó csatornában zajló nanofolyadék kényszerkonvekciós áramlását vizsgálták numerikusan azzal a céllal, hogy elemezzék a mágneses mező és nanofolyadék együttes alkalmazása révén az elágazó csatornában kialakuló szétválasztott áramlás hőátadási viszonyait [6]. A hő- és elektromos vezetőképesség javulása a nanorészecskék jelenléte révén az alkalmazott mágneses mezőben érhető el, ezáltal kedvezőbb termofizikai tulajdonságokat biztosít a nanofolyadék az alapfolyadékhoz képest, amikor azt hőátadó közegként használják egy elágazó csatornában.

Ali és munkatársai egy hibrid nanofolyadék magnetohidrodinamikai (MHD) viselkedését vizsgálták koaxiális hengerek között, ahol kerozinból álló alapfolyadékból, valamint grafén-oxidból (GO) és réz (Cu) nanorészecskékből készült a hőátadó közeg. A külső henger forog, míg a belső mozdulatlan marad, és egyenletes radiális mágneses mezőt alkalmaznak [7].

Tanulmányunkban egy porózus kúp és egy henger ellenforgásában áramló tompa ezüst részecskéket és mikroorganizmusokat tartalmazó nanofolyadék áramlását elemezzük napsugárzás és mágneses tér jelenlétében. A napsugárzás, a mágneses erő és a porozitás sebesség és hőmérséklet eloszlásra gyakorolt hatását elemezzük a modellben szereplő paraméterek figyelembevételével. Az elért eredményeket ábrákon szemléltetjük.

## 2. A VIZSGÁLT MODELL

Az 1. ábrán mutatjuk be a vizsgált folyamat fizikai modelljét, ahol látható a henger, a benne szereplő forgó kúppal és az áramlásra ható sugárzás, illetve mágneses tér.



1. ábra: Áramlás fizikai modellje

Összenyomhatatlan folyadék kétdimenziós lamináris áramlását modellezzük az 1. ábrán látható ellenforgásban lévő henger és porózus kúp között. Az áramlás matematikai leírására az alábbi egyenletrendszert alkalmazzuk:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\gamma_{hnf}}{\rho_{hnf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\gamma_{hnf}}{k\rho_{hnf}} (u - u_r) - \frac{\sigma_{hnf} B_0^2}{\rho_{hnf}} (u - u_r)^2 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{hnf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\gamma_{hnf}}{\rho_{hnf} C_{phnf}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma_{hnf} B_0^2}{\rho_{hnf} C_{phnf}} (u - u_r)^2 + Q''' \quad (3)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_B \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{D_T}{T_\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K_r (C - C_\infty) \quad (4)$$

$$u \frac{\partial n}{\partial x} + v \frac{\partial n}{\partial y} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - X_n \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (5)$$

ahol  $(u, v)$  az  $(x, y)$  irányú sebesség komponensek,  $\gamma_{hnf}$  a kinematikus viszkozitás,  $\rho_{hnf}$  a sűrűség,  $k$  termikus vezetőképesség,  $u_r$  vezetőképesség,  $\sigma_{hnf}$  az elektromos vezetőképesség,  $\alpha_{hnf}$  hődiffúziós együttható,  $T$  a hőmérséklet,  $C_{phnf}$  fajlagos hőkapacitás,  $B_0$  mágneses erősség,  $Q'''$  térfogati hőforrás,  $D_B$  tömegdiffúziós együttható,  $D_T$  termoforetikus együttható,  $K_r$  kémiai reakció együtthatója,  $C$  koncentráció,  $D_n$  mikroorganizmusok diffúziós állandója,  $X_n$  kemotaxis válasz.

### Peremfeltételek

$y = 0$  helyen:

$$u = u_c = \omega_c \sin \tau, \quad v = v_\omega, \quad T = T_\omega, \quad C = C_\omega, \quad n = n_\omega \quad (6)$$

$y = H$  helyen:

$$u = u_{cy} = -\omega_{cy}, \quad T = T_\infty, \quad C = C_\infty, \quad n = n_\infty \quad (7)$$

ahol

$n$  a mozgássűrűség,  $u_c$  a kúp lineáris sebessége,  $\omega_c$  a kúp szögsebessége,  $\tau$  a kúp vízszintes tengellyel bezárt szöge,  $v_\omega$  szívósebesség a falnál,  $T_\omega$  falhőmérséklet,  $C_\omega$  koncentráció a falnál,  $n_\omega$  mozgások sűrűsége a falnál,  $u_{cy}$  a henger lineáris sebessége,  $\omega_{cy}$  a henger szögsebessége,  $C_\infty$  a környezeti koncentráció és  $n_\infty$  mozgás sűrűség a környező folyadékban rendre,  $H$  a kúp és a henger közötti rés magassága.

Az (1)-(5) parciális differenciálegyenlet rendszer (PDE) a hozzá tartozó (6)-(7) peremfeltételekkel együtt írja le a modellezett állandósult áramlást. Célunk ezen egyenletrendszer numerikus közelítő megoldásainak előállítására és a paraméterek megoldásra gyakorolt hatásának elemzése.

Bevezetjük az áramfüggvényt a szokásos módon, mellyel az (1) folytonossági egyenletet kielégítjük. Ezt követően hasonlósági változót és hasonlósági függvényeket vezetünk be, melyek segítségével dimenziómentesítjük a (2)-(5) PDE rendszert és visszavezetjük közönséges differenciálegyenlet (KDE) rendszerre, mely numerikusan kezelhető.

A hasonlósági változó és függvények behelyettesítése után adódik az alábbi KDE rendszer, a hozzá tartozó feltételekkel:

$$f'' + \frac{f f''}{2} - (f')^2 - \left( \frac{f' - \lambda_r}{K_p} \right) - M(f' - \lambda_r)^2 = 0, \quad (8)$$

$$\theta'' + \frac{Pe f \theta'}{2} + Pr Ec (f'')^2 + Pr M_\theta (f' - \lambda_r) + Q e^{-\lambda \eta} = 0, \quad (9)$$

$$\phi'' + \frac{Sc f \phi'}{2} - N_t \theta'' - K_r \phi = 0, \quad (10)$$

$$N'' + \frac{Pe f N'}{2} - \beta_1 N \phi'' = 0, \quad (11)$$

ahol

$f(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$ ,  $\phi(\eta)$ ,  $N(\eta)$  a dimenziómentes sebességet, hőmérsékletet, koncentrációt, mikroorganizmusok sűrűségét jelentik és az  $\eta$  a hasonlósági változó,  $K_p$  porozitás,  $M$  mágneses tér erősség,  $\lambda_r$  relatív sebesség,  $Pe$  biokonvekció paraméter,  $Pr$  Prandtl szám,  $M_\theta$  Joule fűtés,  $Ec$  Eckart szám,  $Q$  térfogati sugárzási forrás,  $N_t$  termoforézis,  $Sc$  Schmidt-szám,  $K_r$  kémiai reakció,  $\beta_1$  dimenzió nélküli kemotaxis válasz,  $S$  átteresztő képesség (porozitási paraméter),  $\lambda_r$  sugárzás csillapítási állandó.

**Peremfeltételek** $\eta \rightarrow 0$  helyen:

$$f = S, \quad f' = 1, \quad \theta = 1, \quad \phi = 1, \quad N = 1, \quad (12)$$

 $\eta \rightarrow \infty$  helyen:

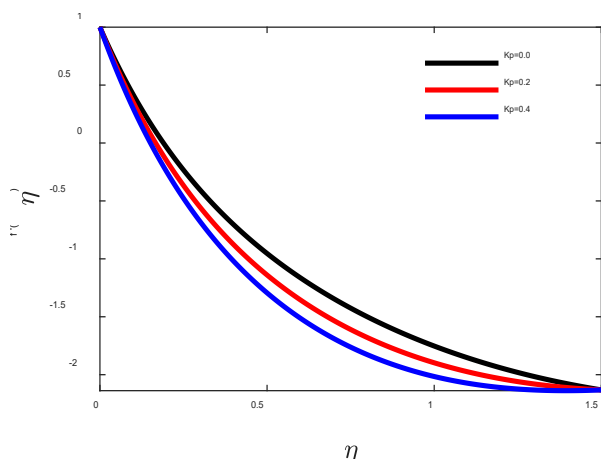
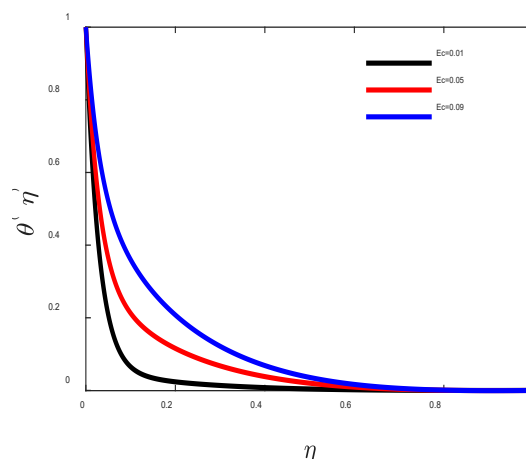
$$f' = -\lambda_r, \quad \theta = 0, \quad \phi = 0, \quad N = 0. \quad (13)$$

A (8)-(11) KDE rendszer és a hozzá tartozó (12)-(13) peremfeltételek által alkotott egyszerűbb matematikai struktúra már jobban kezelhető numerikusan mint az eredeti PDE rendszerre felírt pereméték feladat. Célunk a numerikus megoldások előállítására bvp4c beépített eljárással.

**3. NUMERIKUS MEGOLDÁSOK**

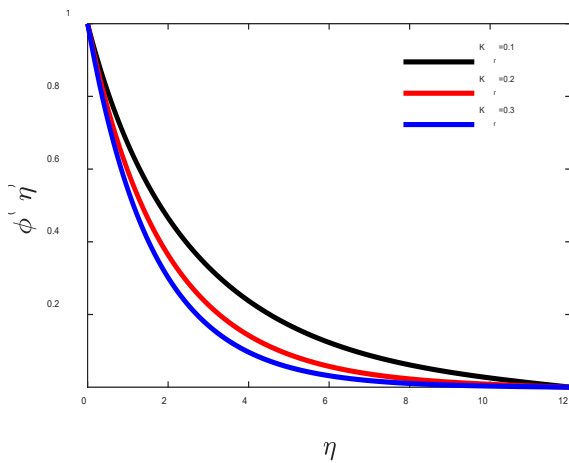
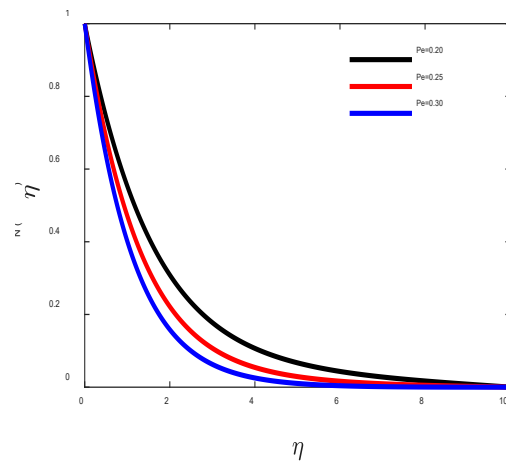
A (8)-(13) KDE peremérték feladat megoldására MATLAB programot használtunk, azon belül a beépített bvp4c rutint. Az alábbi ábrákon szemléltetjük a dimenziómentes megoldásokat és a paraméterek megoldásokra gyakorolt hatását néhány esetre.

A 2. ábra azt mutatja, hogy az áramlási sebesség a porozitási paraméter növekedésével csökken. A porózus szerkezeten belüli megnövekedett szilárd-folyadék határfelület fokozza a lendületi ellenállást és a disszipatív hatásokat. Ez a kölcsönhatás növeli a viszkozitást, ami korlátozza az áramlást. A hosszú tartózkodási idő javítja a hőelvezetést. A szabályozott porozitás alkalmazása egyensúlyt teremt az ellenállás és a teljesítmény között a napkollektorokban, hőcserélőkben és geotermikus tárolókban.

2. ábra  $K_p$  hatása a sebességeloszlásra3. ábra  $Ec$  hatása a hőmérsékleteloszlásra

A 3. ábra az Eckert-szám függvényében mutatja a hőmérséklet-emelkedést, ami jól tükrözi a viszkozus disszipáció jelentőségét az áramlásban. A kúp és a henger közötti relatív mozgás a hőmérsékleti gradiensekkel együtt a mozgási energiát belső energiává alakítja át. A nagy teljesítményű elektronikus rendszerekben és a forgó elektromágneses eszközökben a kritikus viszkozus melegedés – ha nem megfelelően szabályozzák – ronthatja a hőkezelés hatékonyságát. Ez az eredmény releváns olyan hűtőberendezések tervezése során, mint a mágnesesen vezérelt reaktorok, az elektromos motorok, valamint az olyan elektronikus alkatrészek esetében, ahol mind viszkozus, mind elektromágneses melegedés jelen van. A túlmelegedés minimálisra csökkentése és a megbízható működési hatékonyság elérése érdekében elengedhetetlen az optimalizált hőkezelés, az anyagválasztás és a mágneses mező hangolása.

Az 4. ábra egy olyan kémiai reakciót ábrázol, amely az oldott anyag koncentrációjának csökkenését eredményezi. A reaktív anyagok fokozott fogyasztása, a radiális áramlás és a szívóhatások együttes hatására a reagáló anyagok pótlás nélkül eltávolításra kerülnek. A fenntartható vízkezelő és reaktív szűrőrendszerek ezt a mechanizmust alkalmazzák a szennyező anyagok hatékony lebontásának és eltávolításának elősegítésére. A porózus közegben zajló, szabályozott kémiai reakciót így fel lehet használni a tisztítási hatékonyság növelésére, miközben a maradék szennyezőanyagok koncentrációja minimálisra csökkenthető.

4. ábra  $K_r$  hatása a koncentrációra5. ábra  $Pe$  hatása a sűrűségeloszlásra

Az 5. ábra azt szemlélteti, hogy a mozgékony mikroorganizmusok sűrűsége a biokonvekciós paraméter növekedésével csökken. A forgás és a biokonvekciós aktivitás együttes hatása fokozza az átkeveredést, ami a mikroorganizmusok egyenletesebb eloszlását eredményezi a folyadékban. A fenntartható bioreaktorok és a szennyvíztisztítási alkalmazások esetében ez a tényező döntő szerepet játszik. A mikroorganizmusok túlzott eltávolítása korlátozhatja a biológiai aktivitást. A lebontási és az erőforrás-visszanyerési folyamatokhoz egyensúlyra van szükség a hatékony mikrobiális populáció fenntartása érdekében.

#### 4. KÖVETKEZTETÉSEK

A lehűtési sebesség csökken a mágneses tér erősségének növekedésével. A meghosszabbított érintkezési idő lehetővé teszi, hogy a kúp falából több hő juthasson a határrétegbe. Több energia terjed a határon, mint amennyi visszamarad. A biokonvekciós intenzitás 0,3 körül, kemotaktikai érzékenység pedig 0,02 alatti fokozza a mozgékony mikroorganizmusok szállítását. A biokonvekciós mechanizmust akkor alkalmazzák, amikor infravörös sugarakat használnak mikrobák kezelésére és szárítási folyamatra, például gabonafélékre és kávébogyókra. A porozitás megjelenik a biodízel motorok üzemanyag-szűrésében és vízfeldolgozó üzemekben.

#### IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Waseem, M., Hassan, W. H., Jawad, M., Bognar, G., & Ghodhbiani, R. *Examination of Chemical Reaction on Second-Grade Nanofluid Micropolar nanofluid due to exponential stretchable sheet: A comparative study and*, South African Journal of Chemical Engineering, 2025, 53(1), 373-385.
- [2] Mahabaleshwar, U. S., Vishalakshi, A. B., Bognar, G. V., & Mallikarjunaiah, S. M. *Effect of thermal radiation on the flow of a Boussinesq couple stress nanofluid over a porous nonlinear stretching sheet*. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2022, 8(4), 169.
- [3] Sadaf, T., Ali, A. B., Khan, S. U., Khan, M. I., & Khedher, N. B. *Numerical exploration for bioconvective nanofluid flow towards a rotating surface with chemical reaction and radiative effects*. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 2025, 101310.
- [4] Abbas, Z., Hasnain, J., Rafiq, M. Y., Saeed, M. A., & Shahzad, H. *Oblique stagnation point flow of hybrid nanofluid on a stretching sheet with modified thermal conductivity models and Darcy's law*. Kuwait Journal of Science, 2025, 100481.
- [5] Patil, P. M., Goudar, B., Patil, M., & Momoniat, E. *Bioconvective periodic MHD Eyring-Powell fluid flow around a rotating cone: influence of multiple diffusions and oxytactic microorganisms*. Alexandria Engineering Journal, 2023, 81, 636-655.
- [6] Selimefendigil, F., Öztop, H. F., & Chamkha, A. J. (2020). *Role of magnetic field on forced convection of nanofluid in a branching channel*. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2020, 30(4), 1755-1772.
- [7] Ali, A., Pasha, A. A., Tirth, V., Sarfraz, M. M., Algahtani, A., & Irshad, K. *Thermal analysis of MHD radiative flow of hybrid nanofluids in a porous medium between coaxial cylinders*. Journal of Radiation Research and Applied Sciences, 2025, 18(3), 101699.