

## Falazatok geometriája és stabilitása

### Geometry and structural performance of masonry walls

NAGY Klaudia<sup>1,4</sup>, Dr. LÉVAY Sára<sup>2,4</sup>, Dr. DOMOKOS Gábor<sup>1,4</sup>, Dr. TÖRÖK János<sup>3,4</sup>

1. BME Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék

1111 Budapest, Műgyetem rkp. 3. K220.

+36-1-463-1168, [www.mgm.bme.hu](http://www.mgm.bme.hu)

2. Departamento de Física y Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias

Universidad de Navarra, Pamplona, Spain

3. BME Elméleti Fizika Tanszék

1111 Budapest, Budafoki út. 8.

4. HUN-REN-BME Morfodinamikai Kutatócsoport

Műgyetem rkp. 3, Budapest, 1111, Hungary

#### Abstract

*The structural performance and durability of masonry walls depend on the arrangement of its building elements. This paper analyses the bond patterns of masonry walls as convex planar mosaics and introduces the definition of cell density ( $\rho = \frac{V}{F}$ ), which is the ratio of the number of nodes ( $V$ ) and number of building blocks ( $F$ ) on the surface of the wall. Through contact dynamics simulations, it can be shown that higher values of cell density can result in more favourable structural behaviour. Thus, cell density is the universal, quantified definition of the wall bond, that enables the estimation of the upper limit of structural performance of any wall, and makes different walls comparable.*

**Keywords:** masonry, geometry, mosaic, contact dynamics, stability

#### Kivonat

*A falazatok stabilitása és tartóssága nagyban függ az elemek elrendezésétől. Ezen kutatás a falazatok kötés-képét síkbeli mozaikként értelmezve bevezeti a cellasűrűség fogalmát ( $\rho = \frac{V}{F}$ ), amely a felfelületről leolvasható építőelemek csomópontjainak ( $V$ ) és az összes építőelem darabszámának ( $F$ ) aránya. Kontakt dinamika szimulációkkal megmutatható, hogy a magasabb cellasűrűség kedvezőbb szerkezeti viselkedést eredményezhet. A cellasűrűség így a kötés általánosított, számszerűsített fogalma, ami lehetővé teszi falazatonként a stabilitás felső korlátjának megállapítását és a különböző falazatok összehasonlítását.*

**Kulcsszavak:** falazat, geometria, mozaik, kontakt dinamika, stabilitás

## 1. BEVEZETÉS

A falazatok a legrégebb óta épített szerkezetek egyike. Számos példa mutatja szerte a világon, hogy akár évezredekken keresztül épek maradhatnak, akár kötőanyag használata nélkül is. Tehát a tartósság és stabilitás nemcsak az építőanyagtól és építési technikától függ, ami felveti a kérdést, hogy melyek azok a geometriai tényezők, amelyek a falazatok szerkezeti viselkedését befolyásolják.

Itt a stabilitást a geometriai pontatlanságokra való érzékenységgént értelmezzük. Ez a belső erők szórásával jellemezhető.

A falazatok vizsgálatára számos módszer létezik, a geometriai és topológiai indikátoroktól az átfogó szerkezeti szimulációkig. [2-6] Az elmúlt évtizedek előrelépései numerikus modellezésben [4,5,7] és véges elem szimulációkban [6, 8-11] pontos analízist tesznek lehetővé, tönkremeneteli módokat és akár szeizmikus [12-13] hatásokat is figyelembe véve. Ám a történeti falazatok esetében ezek csak korlátozottan alkalmazhatók, mert a pontos geometria, anyagtulajdonságok és a hellyel és idővel is változó építési módok csak ritkán ismertek. Már léteznek módszerek történeti falazatok geometriai és topológiai indikátorokkal való elemzésére [11], ám ezek csak részben írják le a szerkezeti viselkedést.

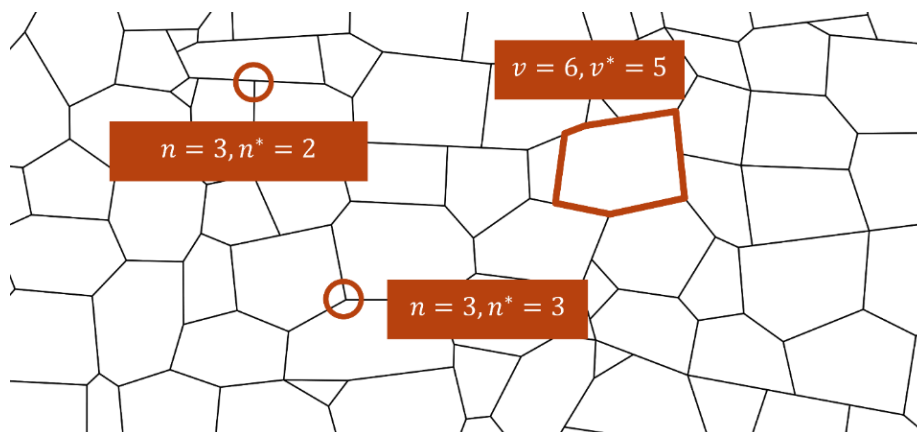
Ezen kutatásban egy lényegesen egyszerűbb matematikai keretrendszeren alapuló mértéket mutatunk be, ami képes jellemezni falazatok stabilitását. Ennek alapja, hogy a falazatokat síkbeli mozaikként értelmezzük, ahol a kötéskép topológiai és geometriai jellemzőit vizsgáljuk; majd kontakt dinamika szimulációkkal számszerűsítjük a stabilitás mértékét.

## 2. FALAZATOK, MINT MOZAIKOK

### 2.1. A konvex mozaikok átlagtér-elmélete

Az egyhéjú száraz falazatokat modellezhetjük síkbeli mozaikként. A sík hézag- és átfedésmentes sokszögekre való felosztását mozaiknak nevezzük. A sokszögek a mozaik *cellái*, a mozaik *csomópontjai* azok a pontok, ahol a cellacsúcsok egybeesnek. Bár a cellák lehetnek konvexek és konkávok is, az analízist csak konvex cellákra, azaz konvex mozaikokra korlátozzuk.

A mozaikot jellemezhetjük globálisan a cellák számával ( $F$ ) és csomópontok számával ( $V$ ), lokálisan pedig a cellák és csomópontok fokszámaival, melyek lehetnek geometriai vagy kombinatorikus fokszámok. A kombinatorikus cellafokszám ( $v$ ) a cellák határán lévő csomópontok száma, a geometriai cellafokszám ( $v^*$ ) a cella csúcsainak száma. A kombinatorikus csomóponti fokszám ( $n$ ) a csomópontban találkozó cellák száma, míg a geometriai csomóponti fokszám ( $n^*$ ) az egybeeső csúcsok száma. A csomópontok lehetnek regulárisak – ha csak cella-csúcsok találkoznak – vagy irregulárisak – ha a csomópont egy másik cella egyik élére esik. Az irreguláris csomópontok kombinatorikai fokszámánál mindig pontosan 1-gyel alacsonyabb a geometriai fokszámuk.



1.ábra

*A fokszámok grafikus definíciója*

A fokszámokat a teljes mintára vonatkoztatva átlagukkal fejezzük ki [14].

A kombinatorikus átlagok:

$$\bar{n} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^V n_i, \quad \bar{v} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^F v_i$$

A geometriai átlagok:

$$\bar{n}^* = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^V n_i^*, \quad \bar{v}^* = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^F v_i^*$$

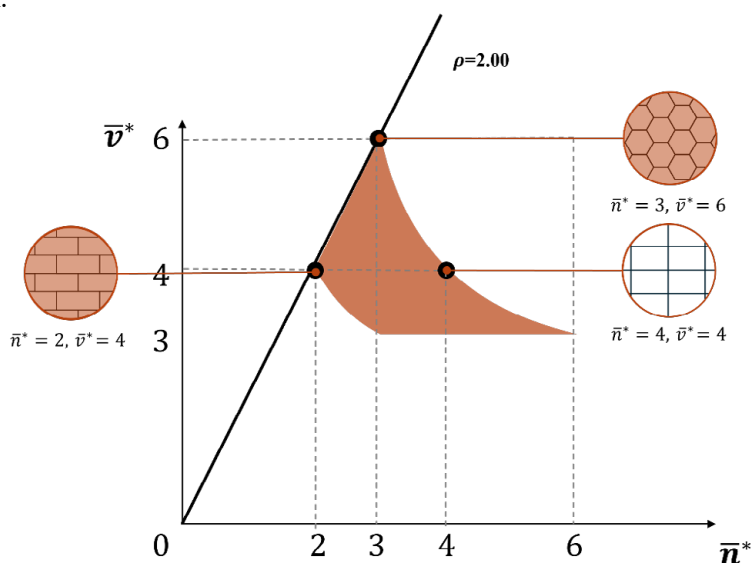
Ezen átlagok hányadosaként vezetjük be a cellasűrűség fogalmát:

$$\rho = \frac{\bar{v}}{\bar{n}} = \frac{\bar{v}^*}{\bar{n}^*} = \frac{V}{F},$$

amely tetszőleges konvex mozaik esetén  $1 \leq \rho \leq 2$  értéket vehet fel.

A mozaikok paramétereit ábrázolhatók az  $[\bar{n}, \bar{v}; \bar{n}^*, \bar{v}^*]$  szimbolikus síkon, ahol [14] alapján a konvex mozaikok lehetséges tartományát négy görbe határolja.

A valós falazatok végesek, a mozaikok átlagter-elméletének egyenletei pedig végtelenre vonatkoznak. Az emiatt fellépő peremhatásokat elhanyagoljuk, és a mozaik belsejét egy végtelen mozaik reprezentatív mintájának tekintjük.



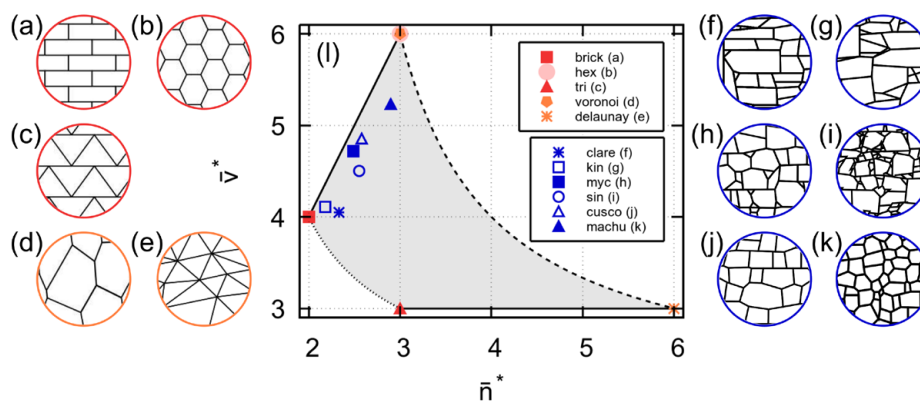
2. ábra.

A konvex síkbeli mozaikok lehetséges tartománya (narancssárga) az  $[\bar{n}, \bar{v}; \bar{n}^*, \bar{v}^*]$  szimbolikus síkon a  $\bar{v}^* = \frac{2\bar{n}^*}{\bar{n}^*-1}$ ;  $\bar{v}^* = \frac{2\bar{n}^*}{\bar{n}^*-2}$ ;  $\bar{v}^* = 2\bar{n}^*$ ;  $\bar{v}^* = 3$  görbék által határolva, a téglakötés  $[\bar{n}^*, \bar{v}^*] = (4,2)$ , a hatszögfal  $[\bar{n}^*, \bar{v}^*] = (3,6)$ , és a hálós téglafal  $[\bar{n}^*, \bar{v}^*] = (4,4)$  kötésképével, valamint a cellasűrűség elméleti maximumával  $\rho = 2$ .

### 2.2. Falmozaikok történeti falazatok alapján

A klasszikus falak (tégla, hatszög) kötéskepei a  $\rho = 2$  elméleti maximumot jelentő cellasűrűséget veszik fel a szimbolikus síkon, míg a hálós falazat a  $\rho = 1$  minimum értéket. Ez felveti a kérdést, hogy a magas cellasűrűség valóban a stabil, tartós falak közös tulajdonsága-e. Ennek érdekében hat időben és térben is egymástól távol álló történeti falazatot elemeztünk síkbeli konvex mozaikként, amelyek nem követik téglafal falazási elvét. A falmozaikok elkészítéséhez nagyfelbontású fényképekről leolvasható falazóelemeket konvex sokszöggként közelítettük, majd meghatároztuk a cellák és csomópontok számát, végül pedig az átlagos fokszaomokat és cellasűrűséget. A számítógépes szimulációkhoz ezen mintákat periodikussá alakítottuk minimális számú cellák hozzáadásával, amely az átlagos fokszaomokat nem változtatta.

Mind a hat vizsgált történeti falazat a  $\rho = 2$  elméleti maximumhoz közeli  $\rho \geq 1.73$  cellasűrűséggel rendelkezik. A cellasűrűség a szerkezeti viselkedéssel szemben nem függ a fal orientációjától, viszont feltételezhető, hogy a falazatok optimális elrendezésben épültek. Így a cellasűrűség értelmezhető a stabilitás mértékét felső határként becsülő paraméterként.



3. ábra.

Periodikus (a-c), generált (d-e) és a hat történeti falazaton alapuló falmozaikok (f-k) a szimbolikus síkon

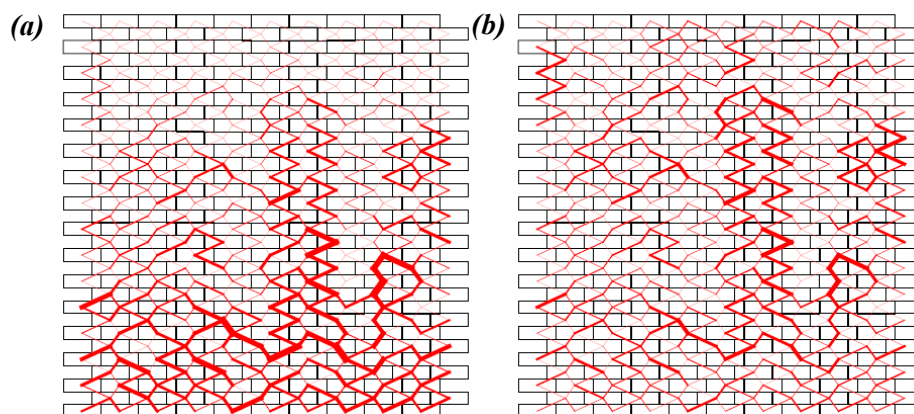
| Helyszín               | Építési idő | $\bar{n}^*$ | $\bar{v}^*$ | $\rho$ | jelölés a 3. ábrán |
|------------------------|-------------|-------------|-------------|--------|--------------------|
| Mükéné,<br>Görögország | i.e. 1500   | 2.49        | 4.72        | 1.89   | (h)                |
| Sintra, Portugália     | i.sz. 900   | 2.54        | 4.58        | 1.80   | (i)                |
| Cusco, Peru, Chile     | i.sz. 1450  | 2.58        | 4.85        | 1.88   | (j)                |
| Cusco, Peru, Chile     | i.sz. 1450  | 2.90        | 5.23        | 1.80   | (k)                |
| Clare, Írország        | i.sz. 1700  | 2.23        | 4.05        | 1.73   | (f)                |
| Kinvarra, Írország     | i.sz. 1700  | 2.60        | 4.19        | 1.61   | (g)                |

A további fejezetekben számítógépes szimulációkkal támasztjuk alá, hogy a cellasűrűség egy megbízható indikátora a stabilitásnak.

### 3. KONTAKT DINAMIKA SZIMULÁCIÓK

A stabilitás mértékének felső korlátjának meghatározáshoz és annak cellasűrűséggel való összekapcsolásához két típusú mozaikot vizsgálunk: történeti falakból származtatott falmozaikokat, és véletlenszerűen generált mozaikokat.

A geometriai, topológiai elemzést kontakt dinamikai (CD) szimulációk egészítik ki. A CD merev testek közötti kontakterők számítására alkalmazható, így ez az ideális erőszámítási mód [15] a falazatokban ébredő erőhálózat meghatározására. A módszer nem a testek (falazóelemek) deformációján alapul, hanem a merev testek közötti kontakterők kényszerfeltételek alapján kerülnek meghatározásra. Ilyen feltétel a nem-átfedés és a Coulomb-súrlódás. A CD lehetővé teszi ismételt szimulációkkal az erőeloszlásának statisztikai elemzését [1]. Minden konfigurációra több független futtatás történik különböző inicializálással, majd a kontakt-erők szórását vizsgáljuk meg, mint a stabilitás mértékét.



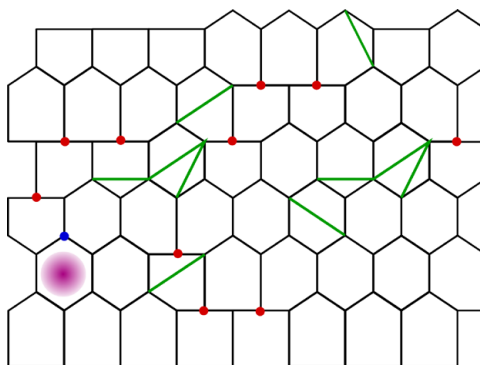
4. ábra.

*Kontakterő-hálózat 1/4 eltolású téglafalban. Két elem közötti kontakterőket az elemek középpontjait összekötő piros szakaszokkal jelöljük, melyeknek vastagsága arányos az erő nagyságával.*

*(a): CD szimuláció eredménye. (b): Hidrosztatikus komponenssel normalizált erőhálózat, ahol az egyes kontakterők összehasonlítható léptékűek.*

Hogy a cellasűrűséggel össze tudjuk kapcsolni a szimulációkat, olyan mozaikokat generálunk, amelyek egyenletesen lefedik a szimbolikus síkon a konvex mozaikok lehetséges tartományát. Az előre meghatározott

szerkezetű mozaikoknál a vizsgálat célja az azonos topológia jellemzők melletti konkrét geometriai elrendezés (pl. eltolás mértéke a téglakötésben) hatása a stabilitásra.

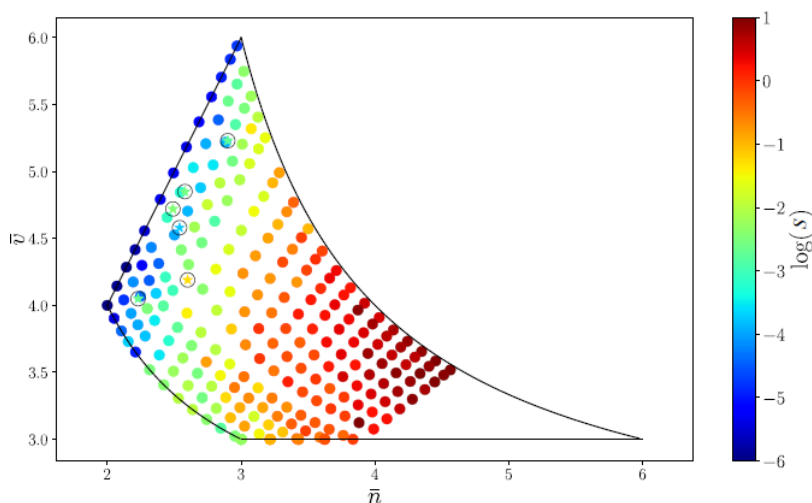


5. ábra.

*Példa a generált mozaikra. A tetszőleges fokszerű mozaikokhoz egy hatszögrácsot  $[\bar{n}^*, \bar{v}^*] = (3,6)$  (lila cella) módosítunk kétféleképpen: két csomópont közé új éleket rajzolunk (zöld szakaszok), vagy reguláris csomópontokat tolnak el, míg azok irregulárisak nem válnak (piros pontok). Ez előbbi az átlagos cellafokszámot csökkenti, míg utóbbi az átlagos csomópont-fokszámot.*

## 4. EREDMÉNYEK

A szimbolikus síkon a cellasűrűséggel rendelkező konvex mozaikok lehetséges tartományát teljesen lefedő generált mozaikok vizsgálata jelenti ezen kutatás fő eredményét: minden generált mozaik alapján CD szimulációk készültek, amelyek meghatározták az erőhálózatot, illetve annak szórását. A legkisebb szórás azoknál a mozaikoknál jelentkezik, ahol a cellasűrűség maximális. Ez alátámasztja, hogy a cellasűrűség korrelál a stabilitással, és jó közelítést ad annak felső korlátjára.



6. ábra.

*A kontakterők szórása a cellasűrűség függvényében. A legkisebb szórás értékeket a sötétkék, míg a legmagasabbakat a piros pontok jelölik. A hat vizsgált történeti falazat (csillaggal jelölve) magas cellasűrűséggel rendelkezik, erőrendszerük szórása pedig az őket körülvevő generált mozaikokéhoz hasonlóan alacsony.*

Továbbá az eredmények rávilágítanak az irreguláris csomópontok szerepére: az irreguláris csomópontok elősegítik az erők egyenletes eloszlását, míg a magasabb fokszámú csomópontokban elkerülhetlenné válik a csúcs-csúcs kapcsolat. Ez a kapcsolattípus erőátadás szempontjából igen érzékeny, ami nagyobb szórást eredményez. Ez természetesen már évezredek óta ismert a kőművesek számára, ami a téglakötés létezésében nyilvánul meg.

A cellasűrűség egy másik, már létező [11] mérőszámmal is összehasonlításra került, ami a fal teteje és alja közötti legrövidebb út hosszán ( $m$ ) alapul. Mindkét mérték hasonlóan működik: magasabb  $m$  és  $\rho$  értékkel

csökken az erőrendszer szórása, ami korrelációt mutat a stabilitással. Azonban egy lényeges különbség van a két mérték között: a legrövidebb út hossza jól indikálja a nagyon instabil falakat, míg a cellasűrűség a legstabilabb falakat jelzi pontosan. Ha csak a legjobban teljesítő falakat vizsgáljuk (a felső harmadát az általunk vizsgált eseteknek), akkor a cellasűrűség egyértelműen jobban jelzi előre a stabilitás mértékét.

A cellasűrűség önmagában nem tartalmaz minden stabilitással kapcsolatos információt, ugyanakkor ez az egyszerűen meghatározható mérőszám reális felső korlátot tud adni a stabilitás mértékére.

## 5. KÖVETKEZTETÉSEK

A falazatok kötéskepe leírható síkbeli konvex mozaikként. A falmozaik cellasűrűsége egy egyszerűen számítható mérőszám, ami megbízhatóan jelzi előre a falszerkezet stabilitásának felső korlátját. Az általunk generált, és valós történeti falakból készült mozaikok analízise, valamint a velük végzett szimulációk alapján megállapítható, hogy a magasabb cellasűrűség nagyobb mértékű stabilitást jelent, különösen, ha a falazat orientációja optimális. A történeti falak cellasűrűsége közel van az elméleti maximumhoz, ami alátámasztja a módszer érvényességét. A cellasűrűség más mérőszámokkal összehasonlítva hasonló vagy jobb eredményt ad. Összefoglalva, a cellasűrűség egyszerű és általánosan alkalmazható mérték a falazatok stabilitásának becslésére.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Domokos Gábornak és társszerzőimnek a kutatás során nyújtott szakmai támogatásért és iránymutatásért. A kutatás az NKFIH 149429 pályázat támogatásával valósult meg, SL a spanyol kormány PID2023-146422NB-I00 számú pályázatának támogatásában részesült.

## IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Unger, T., Kertész, J., Wolf, D. E., Force indeterminacy in the jammed state of hard disks, *Physical Review Letters*, APS, 2005, 94(17), 178001.
- [2] Lemos, J. V., Discrete element modeling of masonry structures, *International Journal of Architectural Heritage*, Taylor & Francis, 2007, 1(2), 190–213.
- [3] Cecchi, A., Sab, K., A comparison between a 3D discrete model and two homogenised plate models for periodic elastic brickwork, *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, 2004, 41(9–10), 2259–2276.
- [4] Theodossopoulos, D., Sinha, B., A review of analytical methods in the current design processes and assessment of performance of masonry structures, *Construction and Building Materials*, Elsevier, 2013, 41, 990–1001.
- [5] Giordano, A., Mele, E., De Luca, A., Modelling of historical masonry structures: comparison of different approaches through a case study, *Engineering Structures*, Elsevier, 2002, 24(8), 1057–1069.
- [6] Lourenço, P. B., Rots, J. G., Multisurface interface model for analysis of masonry structures, *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, 1997, 123(7), 660–668.
- [7] Lourenço, P., Experimental and numerical issues in the modelling of the mechanical behaviour of masonry, *Structural Analysis of Historical Constructions II*, 1998.
- [8] Page, A. W., Finite element model for masonry, *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, 1978, 104(8), 1267–1285.
- [9] Sulem, J., Mühlhaus, H. B., A continuum model for periodic two-dimensional block structures, *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, Wiley, 1997, 2(1), 31–46.
- [10] Funari, M. F., Pulatsu, B., Szabó, S., Lourenço, P. B., A solution for the frictional resistance in macro-block limit analysis of non-periodic masonry, *Structures*, Elsevier, 2022, 43, 847–859.
- [11] Szabó, S., Funari, M. F., Lourenço, P. B., Masonry patterns' influence on the damage assessment of URM walls: Current and future trends, *Developments in the Built Environment*, Elsevier, 2023, 13, 100119–100119.
- [12] Dafnis, A., Kolsch, H., Reimerdes, H. G., Arching in masonry walls subjected to earthquake motions, *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, 2002, 128(2), 153–159.
- [13] DeJong, M. J., Seismic assessment strategies for masonry structures, Massachusetts Institute of Technology, 2009., Doktori disszertáció.
- [14] Domokos, G., Lángi, Z., On some average properties of convex mosaics, *Experimental Mathematics*, Taylor & Francis, 2022, 31(3), 783–793.
- [15] Brendel, L., Unger, T., Wolf, D. E., Contact dynamics for beginners, *The Physics of Granular Media*, Weinheim: Wiley-VCH, 2004, 325–343.